ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

TOME SOIXANTE-DEUXIÈME, 1948

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

DEUXIÈME FASCICULE

25 MAI 1948

Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique

LOUVAIN

Secrétariat de la Société Scientifique

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

Chèques postaux 2027.46

1948

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé : 35 frs

TABLE DES MATIÈRES

Le prix d'ABONNEMENT aux ANNALES, série I, pour des personnes ne faisant pas partie de la Société scientifique, est fixé comme suit :

en Belgique, au Congo-Belge et au Luxembourg	**70 fr.**
dans les autres pays	**120 fr.**

SESSION DU 15 AVRIL 1948
A BRUXELLES

—

Première Section

—

Sciences Mathématiques et Astronomiques

Sur une méthode d'approximations successives pour l'intégration de certains systèmes non linéaires d'équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes

PAR

R. H. GERMAY

professeur à l'Université de Liège.

---

§ 1. — Considérons un système semi-linéaire d'équations aux dérivées partielles du second ordre de la forme

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 z_j}{\partial x \partial y} = \sum_{\mathrm{K}=1}^{\mathrm{K}=p} & \left\{ a_{j\mathrm{K}}(x, y) \frac{\partial z_\mathrm{K}}{\partial x} + b_{j\mathrm{K}}(x, y) \frac{\partial z_\mathrm{K}}{\partial y} + c_{j\mathrm{K}}(x, y) z_\mathrm{K}(x, y) \right\} \\ & + \Phi_j \left[x, y; z_1, \ldots z_p; \frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}, \ldots\ldots \frac{\partial z_p}{\partial x}, \frac{\partial z_p}{\partial y} \right], \quad (j = 1, 2, \ldots p). \end{aligned} \right.$$

Soit à en rechercher les intégrales s'annulant pour $x = 0$ quel que soit y, et pour $y = 0$ quel que soit x. Nous avons antérieurement montré le rôle que jouent dans l'intégration de pareils systèmes les p^2 fonctions que nous avons appelées fonctions de Riemann et qui sont associées aux coeffients $a_{j\mathrm{K}}$, $b_{j\mathrm{K}}$, $c_{j\mathrm{K}}$ du système linéaire

$$
(2)\quad \frac{\partial^2 z_j}{\partial x\, \partial y} = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=p} \left\{ a_{j\kappa}(x, y)\frac{\partial z_\kappa}{\partial x} + b_{j\kappa}(x, y)\frac{\partial z_\kappa}{\partial y} + c_{j\kappa}(x, y)\, z_\kappa(x, y) \right\} + f_j(x, y), \ (j = 1, 2, \ldots p).
$$ (1)

Nous nous proposons de montrer que la méthode développée dans une note récente pour les systèmes (2) (2), s'applique à des systèmes de la forme plus générale

$$
(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 z_j}{\partial x\, \partial y} &= a_j(x, y)\frac{\partial z_j}{\partial x} + b_j(x, y)\frac{\partial z_j}{\partial y} + c_j(x, y)\, z_j(x, y) \\ &+ \Psi_j\left(x, y; z_1, \ldots z_p; \frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial z_p}{\partial x}, \frac{\partial z_p}{\partial y}\right), \ (j = 1, 2, \ldots p), \end{aligned} \right.
$$

et que de tels systèmes peuvent s'intégrer par approximations successives en ne faisant intervenir que les p fonctions de Riemann relatives à p équations aux dérivées partielles du second ordre de la forme linéaire

$$
(4)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = a_j(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + b_j(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + c_j(x, y)\, z(x, y) + f_j(x, y), \ (j = 1, 2, \ldots p).
$$

§ 2. — Choix d'un domaine. Supposons que les fonctions

$$
a_j(x, y),\ b_j(x, y),\ c_j(x, y),\ \Psi_j(x, y; z_1, \ldots z_p; u_{1,x}, u_{1,y}; \ldots u_{p,x}, u_{p,y})
$$

soient continues dans le champ de variation (D) défini par les relations

$$
(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &0 \leqslant x \leqslant \alpha,\ 0 \leqslant y \leqslant \beta,\ |z_j| \leqslant R_j,\ |u_{jx}| \leqslant S_j,\ |u_{jy}| \leqslant T_j, \\ &\qquad (j = 1, 2, \ldots p), \end{aligned} \right.
$$

les lettres α, β, R_j, S_j, T_j représentant des nombres positifs fixes.

Soient $G_j(x, y; \xi, \eta; 1)$, $(j = 1, \ldots p)$, les fonctions de Riemann associées aux équations (4). Elles sont définies dans le champ de variation (D')

$$
(6)\quad o \leqslant x \leqslant \alpha, \quad o \leqslant y \leqslant \beta, \quad o \leqslant \xi \leqslant x \leqslant \alpha, \quad o \leqslant \eta \leqslant y \leqslant \beta.
$$

---

(1) Sur les fonctions de Riemann associées aux systèmes d'équations aux dérivées partielles et d'équations intégro-différentielles du second ordre à deux variables indépendantes (*Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*, 3e série, tome XIV).

(2) Sur l'intégration par approximations successives de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, série I, t. 62, 1948, pp.3-10).

Désignons par $\mathbf{M}_j$, $\mathbf{N}_j$ des nombres positifs fixes tels que l'on ait dans (D) et (D') respectivement pour $j = 1, 2, \ldots p$,

$$(7) \qquad |\Psi_j| < \mathbf{M}_j, \ |G_j| < \mathbf{N}_j, \ \left|\frac{\partial G_j}{\partial x}\right| < \mathbf{N}_j, \ \left|\frac{\partial G_j}{\partial y}\right| < \mathbf{N}_j.$$

Supposons enfin que les fonctions Ψ_j satisfassent à des conditions de Lipschitz par rapport à $z_1, \ldots z_p, u_{1x}, u_{1y}, \ldots u_{px}, u_{py}$ de manière que nous puissions écrire en vue de la simplification des écritures

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\Phi_j(x, y ; z_1, \ldots z_p ; u_{1x}, u_{1y}, \ldots u_{px}, u_{py}) - \Phi_j(x, y ; z_1^*, \ldots z_p^* ; u_{1x}^*, u_{1y}^*, \ldots u_{px}^*, a_{py}^*)| \\ < \mathbf{K}_j \{ |z_1 - z_1^*| + \ldots |z_p - z_p^*| + |u_{1x} - u_{1x}^*| + \ldots\ldots + |u_{py} - u_{py}^*| \}, (j \ldots 1, 2, p), \end{array} \right.$$

les $\mathbf{K}_j$ désignant des nombres positifs fixes.

Soient enfin R, S, T les plus petits des nombres R_j, S_j, T_j respectivement. Définissons des nombres positifs ρ, ρ' par les conditions

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{M}_j \mathbf{N}_j \rho\rho' < R, \\ \mathbf{M}_j \mathbf{N}_j \rho' (\rho + 1) < S, \quad \mathbf{M}_j \mathbf{N}_j \rho(\rho' + 1) < T, \\ 0 \leqslant \rho \leqslant \alpha, \quad 0 \leqslant \rho' \leqslant \beta', \quad (j = 1, 2, \ldots p). \end{array} \right.$$

Considérons dorénavant x et y dans le domaine D'' défini par les relations

$$(10) \qquad 0 \leqslant x \leqslant \rho, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \rho'$$

§ 3. — Construction de p suites indéfinies de fonctions.

Moyennant les valeurs initiales $Z_{jo} = 0$, définissons de proche en proche dans le domaine (10) les fonctions

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_{jo}, \ Z_{j1}, \ \ldots \ Z_{j\mu}, \ Z_{j,\mu+1}, \ \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial Z_{jo}}{\partial x}, \ \dfrac{\partial Z_{j1}}{\partial x} \ \ldots \ \dfrac{\partial Z_{j\mu}}{\partial x}, \ \dfrac{\partial Z_{j,\mu+1}}{\partial x}, \ \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial Z_{jo}}{\partial y}, \ \dfrac{\partial Z_{j1}}{\partial y} \ \ldots \ \dfrac{\partial Z_{j\mu}}{\partial y}, \ \dfrac{\partial Z_{j,\mu+1}}{\partial y}, \ \ldots\ldots \end{array} \right. \qquad (j = 1 \ldots\ldots p)$$

par la condition suivante : la fonction $Z_{j,\mu+1}$ est l'intégrale s'annulant pour $x = 0$ quel que soit y et pour $y = 0$ quel que soit x de l'équation linéaire

$$(12) \quad \frac{\partial^2 z_j}{\partial x \partial y} = a_j(x, y) \frac{\partial z_j}{\partial x} + b_j(x, y) \frac{\partial z_j}{\partial y} + c_j(x, y)\, z_j(x, y) + \mathbf{H}_{j\mu}(x, y).$$

Nous avons posé, pour abréger,

$$(13) \qquad H_{j\mu}(x, y) = \Psi_j\left(x, y; Z_{1,\mu}, \ldots Z_{p,\mu}; \frac{\partial Z_{1,\mu}}{\partial x}, \ldots\ldots, \frac{\partial Z_{p,\mu}}{\partial y}\right).$$

Cette construction est effectivement possible dans le domaine indiqué. On s'en assure de proche en proche en observant que la fonction $Z_{j,\mu+1}$ a pour valeur

$$(14) \qquad Z_{j,\mu+1}(x, y) = \int_o^x d\xi \int_o^y H_{j\mu}(\xi, \eta)\; G_j(x, y; \xi, \eta; 1)\, d\eta,$$

et que ses dérivées par rapport à x et à y sont données par les formules

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Z_{j,\mu+1}}{\partial x} &= \int_o^y H_{j,\mu}(x, \eta)\; G_j(x, y; x, \eta; 1)\, d\eta \\ &\quad + \int_o^x d\xi \int_o^y H_{j\mu}(\xi, \eta) \frac{\partial G_j}{\partial x}(x, y; \xi, \eta; 1)\, d\eta, \\ \frac{\partial Z_{j,\mu+1}}{\partial y} &= \int_o^x H_{j\mu}(\xi, y)\; G_j(x, y; \xi, y; 1)\, d\xi \\ &\quad + \int_o^x d\xi \int_o^v H_{j\mu}(\xi, \eta) \frac{\partial G_j}{\partial y}(x, y; \xi, \eta; 1)\, d\eta. \end{aligned} \right.$$

§ 4. — Convergence uniforme des suites (11). — Tenant compte des valeurs (13) des fonctions $H_{j\mu}(x, y)$ et des conditions de Lipschitz (8), nous pouvons écrire les trois formules suivantes :

$$\sum_{j=1}^{j=p} \left| Z_{j,\mu+1}(x, y) - Z_{j,\mu}(x, y) \right|$$

$$< L \int_o^x d\xi \int_o^y \sum_{j=1}^{j=p} \left\{ \begin{array}{l} \left| Z_{j,\mu}(\xi, \eta) - Z_{j,\mu-1}(\xi, \eta) \right| \\ + \left| \dfrac{\partial Z_{j,\mu}}{\partial \xi}(\xi, \eta) - \dfrac{\partial Z_{j,\mu-1}}{\partial \xi}(\xi, \eta) \right| \\ + \left| \dfrac{\partial Z_{j,\mu}}{\partial \eta}(\xi, \eta) - \dfrac{\partial Z_{j,\mu-1}}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right| \end{array} \right\} d\eta \;, \qquad (17_1)$$

$$\sum_{j=1}^{j=p} \left| \frac{\partial Z_{j,\mu+1}}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial Z_{j,\mu}}{\partial x}(x, y) \right|$$

$$< \mathrm{L} \int_o^y \sum_{j=1}^{j=p} \left\{ \begin{array}{l} \left| Z_{j,\mu}(x,\eta) - Z_{j,\mu-1}(x,\eta) \right| \\ + \left| \frac{\partial Z_{j,\mu}}{\partial x}(x,\eta) - \frac{\partial Z_{j,\mu-1}}{\partial x}(x,\eta) \right| \\ + \left| \frac{\partial Z_{j,\mu}}{\partial \eta}(x,\eta) - \frac{\partial Z_{j,\mu-1}}{\partial \eta}(x,\eta) \right| \end{array} \right\} d\eta$$

$$+ \mathrm{L} \int_o^x d\xi \int_o^y \sum_{j=1}^{j=p} \left\{ \begin{array}{l} \left| Z_{j,\mu}(\xi,\eta) - Z_{j,\mu-1}(\xi,\eta) \right| \\ + \left| \frac{\partial Z_{j,\mu}}{\partial \xi}(\xi,\eta) - \frac{\partial Z_{j,\mu-1}}{\partial \xi}(\xi,\eta) \right| \\ + \left| \frac{\partial Z_{j,\mu}}{\partial \eta}(\xi,\eta) - \frac{\partial Z_{j,\mu-1}}{\partial \eta}(\xi,\eta) \right| \end{array} \right\} d\eta \quad , \tag{17_2}$$

$$\sum_{j=1}^{j=p} \left| \frac{\partial Z_{j,\mu+1}}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Z_{j,\mu}}{\partial y}(x,y) \right|$$

$$< \mathrm{L} \int_o^x \sum_{j=1}^{j=p} \left\{ \begin{array}{l} \left| Z_{j,\mu}(\xi,y) - Z_{j,\mu-1}(\xi,y) \right| \\ + \left| \frac{\partial Z_{j,\mu}}{\partial \xi}(\xi,y) - \frac{\partial Z_{j,\mu-1}}{\partial \xi}(\xi,y) \right| \\ + \left| \frac{\partial Z_{j,\mu}}{\partial y}(\xi,y) - \frac{\partial Z_{j,\mu-1}}{\partial y}(\xi,y) \right| \end{array} \right\} d\xi$$

$$+ \mathrm{L} \int_o^x d\xi \int_o^y \sum_{j=1}^{j=p} \left\{ \begin{array}{l} \left| Z_{j,\mu}(\xi,\eta) - Z_{j,\mu-1}(\xi,\eta) \right| \\ + \left| \frac{\partial Z_{j,\mu}}{\partial \xi}(\xi,\eta) - \frac{\partial Z_{j,\mu-1}}{\partial \xi}(\xi,\eta) \right| \\ + \left| \frac{\partial Z_{j,\mu}}{\partial \eta}(\xi,\eta) - \frac{\partial Z_{j,\mu-1}}{\partial \eta}(\xi,\eta) \right| \end{array} \right\} d\eta \quad . \tag{17_3}$$

Nous avons posé, pour abréger,

$$\mathrm{L} = \sum_{j=1}^{j=p} \mathrm{N}_j \, \mathrm{K}_j. \tag{18}$$

On est ainsi conduit à penser que

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{j=p} \left| Z_{j,\mu}(x,y) - Z_{j,\mu-1}(x,y) \right| < A_\mu \frac{(x+y)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} \quad ,\\ &\sum_{j=1}^{j=p} \left| \frac{\partial Z_{j,\mu}}{\partial x}(x.\,y) - \frac{\partial Z_{j,\mu-1}}{\partial x}(x,y) \right| < A_\mu \frac{(x+y)^{\mu}}{\mu!} \quad ,\\ &\sum_{j=1}^{j=p} \left| \frac{\partial Z_{j,\mu}}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Z_{j,\mu-1}}{\partial y}(x,y) \right| < A_\mu \frac{(x+y)^{\mu}}{\mu!} \quad , \end{aligned}\right.$$

A_μ désignant un nombre fixe.

Par application des formules récurrentes (17), on trouve alors que

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{j=p} \left| Z_{j,\mu+1}(x,y) - Z_{j,\mu}(x,y) \right| < A_{\mu+1} \frac{(x+y)^{\mu+2}}{(\mu+2)!} \quad ,\\ &\sum_{j=1}^{j=p} \left| \frac{\partial Z_{j,\mu+1}}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial Z_{j,\mu}}{\partial x}(x,y) \right| < A_{\mu+1} \frac{(x+y)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} \quad ,\\ &\sum_{j=1}^{j=p} \left| \frac{\partial Z_{j,\mu+1}}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Z_{j,\mu}}{\partial y}(x,y) \right| < A_{\mu+1} \frac{(x+y)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} \quad , \end{aligned}\right.$$

moyennant

$$(21)\qquad A_{\mu+1} = L\gamma A_\mu \quad , \quad \gamma = (\alpha+\beta)^2 + 3(\alpha+\beta) + 2.$$

Les formules présumées (19) ont lieu directement pour $\mu = 1$. La démonstration ci-dessus prouve qu'elles sont générales. Les séries

$$(22)\left\{\begin{aligned} &\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} [Z_{j,\mu+1}(x,y) - Z_{j,\mu}(x,y)], \quad \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\left[\frac{\partial Z_{j,\mu+1}}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial Z_{j,\mu}}{\partial x}(x,y)\right],\\ &\qquad\qquad \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\left[\frac{\partial Z_{j,\mu+1}}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Z_{j,\mu}}{\partial Z}(x,y)\right]. \end{aligned}\right.$$

sont majorées par des exponentielles. Elles sont absolument et uniformément convergentes. Il est équivalent de dire que les suites (11) sont uniformément convergentes. Il en est de même des suites formées par les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 Z_{j,\mu}}{\partial x\,\partial y}$ des fonctions $Z_{j,\mu}$. Les limites de celles-ci pour $\mu \to \infty$ sont les intégrales du système (3) satisfaisant aux conditions initiales imposées.

Saive, le 18 mars 1948.

Sur les sphères de Tücker du tétraèdre

PAR

M. VICTOR THÉBAULT, Tennie (France)

A la Mémoire de Paul Delens.

Après avoir rappelé les propriétés fondamentales des cercles de TÜCKER associés à un triangle, nous établirons l'analogie complète pour les sphères de TÜCKER d'un tétraèdre.

Depuis les travaux de J. NEUBERG pour le tétraèdre *isodynamique* (1), P. DELENS a signalé ces sphères dans un tétraèdre quelconque, à propos d'une *seconde* sphère de LEMOINE dont il a donné une construction ingénieuse (2). Quelques mois avant sa mort, notre regretté ami nous confiait une certaine déception de n'avoir pu obtenir la *première* sphère de LEMOINE analogue au cercle du même nom d'un triangle. Nous tâcherons de combler cette lacune.

1. — Dans un triangle ABC, des parallèles aux tangentes en A, B, C au cercle circonscrit interceptent des segments égaux M_bN_c, N_cN_a, P_aP_b entre les côtés AB et AC, BC et BA, CA et CB ; les points N_a, P_a, M_b, P_b, M_c, N_c sont sur un cercle qui appartient à un système de TÜCKER. Le centre de ce cercle décrit le diamètre de BROCARD du triangle ABC.

Soient O le centre du cercle circonscrit (O), de rayon R ; K le point de LEMOINE ; ω le centre du cercle de TÜCKER (ω), de rayon σ ; Q le milieu de M_bM_c ; O_a, K_a, ω_a, Q_a les projections des mêmes points sur le côté BC $= a$; V l'angle de BROCARD.

Posons $K\omega : KO = m$.

La symédiane AK passant par Q, des égalités

$$\omega Q : OA = K\omega : KO = m, \quad QQ_a : KK_a = 1 - m,$$

il résulte déjà que

$$(1) \qquad M_bM_c = 2(1 - m)R \operatorname{tg} V, \quad \text{et} \quad \omega Q = mR \qquad (2)$$

(1) *Mémoire sur le tétraèdre*, 1884-36.
(2) *Mathesis*, 1937-447 ; 1938-70.

En outre, la relation

$$\omega\omega_a = (1 - m) \,.\, KK_a + m.\, OO_a$$

donne

$$(3) \qquad \omega\omega_a = (1 - m) R \sin A \operatorname{tg} V + m\, R \cos A,$$

car

$$KK_a = \frac{a}{2} \operatorname{tg} V, \quad OOa = R \cos A.$$

Le carré du rayon du cercle (ω) a donc pour expression

$$(4) \quad \sigma^2 = \overline{\omega M_b^2} = \frac{1}{4}\, \overline{M_b M_c^2} + \overline{\omega Q^2} = R^2 - [(1 - m)^2 \operatorname{tg}^2 V + m^2].$$

De plus, puisque

$$\overline{N_a P_a^2} = 4(\overline{\omega M_b^2} - \overline{\omega\omega_a^2}),$$

le cercle (ω, σ) intercepte sur BC un segment de longueur

$$(5) \qquad N_a P_a = 2.R.\, [(1 - m) \cos A \operatorname{tg} V - m \sin A],$$

et ainsi de suite pour les autres côtés.

N. B. — Si le centre O se projette en O'_a sur l'axe $\Delta_a \equiv \omega\omega_a$, on a, en vertu de (4),

$$(6) \quad \omega_a N_a : O'_a \omega_a = (1 - m) \operatorname{tg} V - m \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \omega_a O'_a N_a = \operatorname{tg} \theta_a,$$

et des relations analogues pour les angles $\omega_b O'_b M_b$, $\omega_c O'_c M_c$.

2. — A. Généralités. — Considérons un tétraèdre $T \equiv ABCD$, inscrit à une sphère (O, R), dans lequel $BC = a$, $DA = a'$, $CA = b$, $DB = b'$, $AB = c$, $DC = c'$.

Des plans parallèles aux plans tangents en A, B, C, D à la sphère (O, R) découpent dans les trièdres de sommets A, B, C, D des triangles, t_a, t_b, t_c, t_d semblables entre eux, par la condition que chaque côté de l'un d'eux est proportionnel au produit aa', bb', cc' de l'arête antiparallèle dans la même face de T par l'arête opposée. Ces plans sont les transformés de la sphère (O, R) par les inversions (A, k_a), (B, k_b), (C, k_e), $D, k_d)$, les puissances k_a, k_b, k_c, k_d étant arbitraires.

Si l'on choisit ces puissances relatives aux sommets A, B, C, D, de manière que

$$\frac{k_a}{a'bc} + \frac{k_b}{b'ca} = \frac{k_c}{c'ab} = \frac{k_d}{a'b'c'} = \frac{1}{k},$$

les triangles t_a, t_b, t_c, t_d sont égaux entre eux et les distances du centre d'homothétie K du tétraèdre tangentiel $T' \equiv A'B'C'D'$ de T et du tétraèdre $T'' \equiv A''B''C''D''$ déterminé par les plans t_a, t_b, t_c, t_d, aux

plans des faces homologues de ces tétraèdres, sont proportionnelles à $a'bc$, $b'ca$, $c'ab$, $a'b'c'$. Le point K est donc fixe lorsque le coefficient k varie, et les sommets A'', B'', C'', D'' de T'' décrivent les droites KA', KB', KC', KD'. Mais le tétraèdre T'' se réduit au second point de LEMOINE L, si (1)

$$k = \frac{aa' + bb' + cc'}{ab'c' + bc'a' + ca'b' + abc}.$$

Donc les points K et L se confondent et les droites A'L, B'L, C'L, D'L sont les lieux des points A'', B'', C'', D'' tels que trois des triangles t_a, t_b, t_c, t_d, qui passent par ces points sont égaux entre eux.

C'est à cause de cette propriété que l'on pourrait appeler les droites A'L, B'L, C'L, D'L, *secondes symédianes* de T, les *premières symédianes* étant les droites AL, BL, CL, DL dont les points sont tels que leurs distances aux faces adjacentes sont proportionnelles aux rayons R_a, R_b, R_c, R_d des cercles circonscrits aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC.

La symédiane D'L, par exemple, rencontre le plan ABC en un point D_2 et les antiparallèles aux côtés BC, CA, AB du triangle ABC menées par ce point sont proportionnelles à aa', bb', cc'. Les coordonnées normales de D_2, par rapport au triangle ABC, sont donc proportionnelles à $a(-aa'+bb'+cc')$, $b(aa'-bb'+cc')$, $c(aa'+bb'-cc')$ tandis que celles du point D_1 où la symédiane rencontre le plan ABC, sont inversement proportionnelles à a', b', c'. (2)

Si le tétraèdre T est *isodynamique*, $(aa' = bb' = cc')$, le point D_2 se confond avec le point de LEMOINE du triangle ABC, de même que le point D_1, et les symédianes DL et D'L sont portées par une même droite, ainsi que les symédianes AL et A'L, BL et B'L, CL et C'L.

B. — *Systèmes de sphères de* TÜCKER. — 1. Dans un tétraèdre T, si des plans parallèles aux plans tangents en A, B, C, D à la sphère circonscrite (O, R) découpent dans les trièdres de sommets A, B, C, D des triangles égaux t_a, t_b, t_c, t_d, les cercles inscrits à ces triangles sont sur une sphère qui fait partie d'un système de TÜCKER (3). Les centres des cercles inscrits à t_a, t_b, t_c, t_d décrivent les symédianes AL, BL, CL, DL et les centres des sphères correspondantes décrivent le diamètre de BROCARD OL de T.

Soient (ω, σ) une sphère de ce système de TÜCKER; I_a le centre du

(1) P. DELENS, *Mathesis*, 1937-447.

(2) V. THÉBAULT, *Annales*, 1922-174 $(ab'c' + bc'a' + ca'b' + abc = 12\,V \cot\theta)$.

(3) P. DELENS, loc. cit.

cercle, de rayon r_a, inscrit au triangle t_a; O_a, ω_a, L_a les projections de O, ω, L sur le plan BCD; θ l'angle de BROCARD tel que nous l'avons défini (1).

Si on pose $L\omega : LO = m$, l'analogie avec le triangle est complète en introduisant les angles A, B, C, D de la sphère (O, R) avec les plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC. D'abord,

$$r_a = (1 - m)R + \text{tg}\ \theta, \qquad \omega I_a = mR; \tag{7, 8}$$

ensuite,

$$\omega\omega_a = (1 - m)R \sin A \text{ tg } \theta + m \text{ R} \cos A. \tag{9}$$

Le carré du rayon de la sphère (ω, σ) est donc

$$\sigma^2 = r_a^2 + \overline{\omega I}_a^2 = R^2 [(1 - m)^2 \text{tg}^2\theta + m^2]. \tag{10}$$

Cette sphère découpe sur la face BCD un cercle (ω_a) dont le diamètre

$$D_a = 2R \ . \ [(1 - m) \cos A \text{ tg } \theta - m \sin A], \tag{11}$$

et ainsi de suite pour les faces CDA, DAB, ABC.

N. B. — Soient O'_a, O'_b, O'_c, O'_d les projections du point O sur les axes $\Delta_a \equiv \omega\omega_a$, $\Delta_b \equiv \omega\omega_b$, ..., Le demi-angle θ_a au sommet O'_a du cône droit de base (ω_a) se définit ainsi,

$$\text{tg } \theta_a = (1 - m) \text{ tg } \theta - m \text{ tg } A, \tag{12}$$

et on a des expressions analogues pour les demi-angles aux sommets O'_b, O'_c, O'_d des cônes droits de bases (ω_b), (ω_c), (ω_d). Il en résulte que si le rapport $L\omega : LO$ est donné, on connaît le sommet O'_a du cône droit dont l'angle au sommet $2\theta_a$ est déterminé. Ce cône est coupé par le plan BCD suivant un cercle (ω_a), et

$$\overline{\omega\omega}_a^2 + \overline{O'_aO'}^2_a \text{ tg}^2 \theta_a = R^2 \ . \ [(1 - m)^2 \text{ tg}^2 \theta + m^2],$$

en vertu des relations (10) et (12). Donc, étant donné un tétraèdre T, une sphère de TÜCKER (ω, σ) est déterminée par son centre ω.

Plus généralement, soient un tétraèdre T, un point P arbitraire et quatre longueurs l_a, l_b, l_c, l_d; il est possible de déterminer huit points Q par où passent des axes Δ_i, $(i = a, b, c, d)$, perpendiculaires aux plans BCD, CDA, DAB, ABC, sur lesquels P se projette en P_i et qui possèdent la propriété suivante : *Il existe quatre angles θ_i tels que les cônes droits de sommets P_i, d'axes Δ_i, et de demi-angles aux sommets θ_i, coupent les faces opposées de T suivant quatre cercles (C_i) situés sur une sphère de centre Q, de rayon l_i tg θ_i, et réciproquement.*

---

(1) *Annales*, 1922, loc. cit.

En effet, (x, y, z, t), (x_1, y_1, z_1, t_1) étant les coordonnées normales absolues de P, Q, pour que les cercles (C_i) soient sur une même sphère en cause, il faut et il suffit, que

$$l_a^2 x_1^2 : (l_a^2 - x^2) = l_b^2 y_1^2 : (l_b^2 - y^2) = \ldots = l_a^2 \operatorname{tg}^2 \theta_a = l_a^2 \operatorname{tg}^2 \theta_b = \ldots$$

Or, les points Q dont les coordonnées normales sont proportionnelles à

$$\pm \frac{\sqrt{l_a^2 - x^2}}{l_a}, \pm \frac{\sqrt{l_b^2 - y^2}}{l_b}, \pm \frac{\sqrt{l_c^2 - z^2}}{l_c}, \pm \frac{\sqrt{l_a^2 - t^2}}{l_d}.$$

remplissent ces conditions et sont au nombre de huit.

Ainsi, quand $P = O$ et $l_i = R$, les huit points Q de coordonnées normales $\pm R_a$, $\pm R_b$, $\pm R_c$, $\pm R_d$, coïncident avec le *second* point de LEMOINE L et avec ses *associés* (1).

Dans cette hypothèse, $\theta_i = \theta$ et la sphère (L, σ), de rayon $\sigma = R \operatorname{tg} \theta$ est la *seconde* sphère de LEMOINE signalée par P. DELENS, et dont voici une génération simple :

Dans un tétraèdre T, *les plans des faces rencontrent les cônes droits ayant pour sommets les projections du centre de la sphère circonscrite sur les perpendiculaires aux faces menées par le second point de* LEMOINE L, *pour axes ces perpendiculaires et pour demi-angles aux sommets l'angle de* BROCARD θ, *suivant quatre cercles situés sur une sphère de centre* L.

2. — SPHÈRES SPÉCIALES DE TÜCKER. — 1°) Première *sphère de* LEMOINE.

Par analogie avec le triangle, $m = \dfrac{1}{2}$ et on a, d'après les relations (7) à (11),

$$\sigma = \frac{R}{2} \sec \theta, \quad D_a = \frac{R}{\cos \theta} \cdot \sin (A - \theta), \ \ldots$$

Ces formules sont de mêmes formes que celles qui concernent le *premier* cercle de LEMOINE d'un triangle, et l'analogie résulte encore du fait que *les parallèles aux droites* (AB_2, AC_2, AD_2), (BA_2, BC_2, BD_2) (CA_2, CB_2, CD_2), (DA_2, DB_2, DC_2), *menées par le point* L, *rencontrent les plans des faces* $B''C''D''$, $C''D''A''$, $D''A''B''$, $A''B''C''$ *du tétraèdre* T'', *transformé du tétraèdre tangentiel* T' *de* T *par l'homothétie* $\left(L, \dfrac{1}{2}\right)$, *en douze points situés sur une même sphère.*

(1) Des considérations analogues s'appliquent à un triangle.

2°) Seconde *sphère de* LEMOINE (ou des COSINUS). Si $m = 0$, on a

$$\sigma = \mathrm{R}\,\mathrm{tg}\,\theta, \qquad \mathrm{D}_a = 2\mathrm{R}\,\mathrm{tg}\,\theta \cos \mathrm{A}, \quad \ldots$$

3°) Lorsque $m = \mathrm{tg}\,\theta : (1 + \mathrm{tg}\,\theta)$, ou $\mathrm{L}\omega : \omega\mathrm{O} = \mathrm{tg}\,\theta$, on a

$$\sigma = \mathrm{R} \sin \theta \operatorname{coséc}\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right), \mathrm{D}_a = 2\mathrm{R} \sin \theta \operatorname{coséc}\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \sin\left(\mathrm{A} - \frac{\pi}{4}\right), \ldots$$

Les diamètres des cercles (ω_a) interceptés par la sphère (ω, σ) sur les plans des faces de T sont proportionnels à

$$\sin\left(\mathrm{A} - \frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\mathrm{B} - \frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\mathrm{C} - \frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\mathrm{D} - \frac{\pi}{4}\right).$$

4°) Quand $m = \sin^2 \theta$, $1 - m = \cos^2 \theta$, on a

$$\sigma = \mathrm{R} \sin \theta, \quad \mathrm{D}_a = 2\mathrm{R} \sin \theta \cos(\mathrm{A} + \theta), \ \ldots,$$

de sorte que la sphère (ω, σ) découpe sur les plans des faces de T des cercles dont les diamètres sont proportionnels à $\cos(\mathrm{A}+\theta)$, $\cos(\mathrm{B}+\theta)$, $\cos(\mathrm{C}+\theta)$, $\cos(\mathrm{D}+\theta)$ et se confond avec la sphère principale relative au grand axe de l'ellipsoïde de BROCARD.

5°) *Sphères de* TÜCKER *tangentes aux plans des faces de* T. Pour la sphère (ω, σ_a) tangente au plan BCD, on a successivement

$$\mathrm{D}_a = 2\mathrm{R}\,.\,[m \sin \mathrm{A} - (1 - m) \cos \mathrm{A}\,\mathrm{tg}\,\theta] = 0,$$

$$m = \frac{\cos \mathrm{A} \sin \theta}{\sin(\mathrm{A} + \theta)}, \qquad 1 - m = \frac{\sin \mathrm{A} \cos \theta}{\sin(\mathrm{A} + \theta)},$$

et

$$\sigma_a = \mathrm{R} \sin \theta : \sin(\mathrm{A} + \theta), \quad \sigma_b = \mathrm{R} \sin \theta : \sin(\mathrm{B} + \theta), \ \ldots$$

Ces sphères touchent les plans des faces en A_2, B_2, C_2, D_2.

6°) *Sphères de* TÜCKER *centrées sur les plans des faces de* T.

Si le diamètre de BROCARD OL rencontre les plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC, en A_3, B_3, C_3, D_3, on a

$$\omega\omega_a = \mathrm{R}\,.\,[(1 - m) \sin \mathrm{A}\,\mathrm{tg}\,\theta + m \cos \mathrm{A}] = 0;$$

de sorte que, pour le point A_3,

$$m = \mathrm{tg}\,\theta : (\mathrm{tg}\,\theta - \cot \mathrm{A}) = -\frac{\sin \mathrm{A} \sin \theta}{\cos(\mathrm{A} + \theta)}, \quad 1 - m = \frac{\cos \mathrm{A} \cos \theta}{\cos(\mathrm{A} + \theta)},$$

et

$$\sigma_a = \mathrm{R} \sin \theta : \cos(\mathrm{A} + \theta), \quad \sigma_b = \mathrm{R} \sin \theta : \cos(\mathrm{B} + \theta), \ \ldots$$

De plus, des égalités

$$1 : m = \mathrm{LA}_3 : \mathrm{OL} = \frac{\cot \mathrm{A}}{\mathrm{tg}\theta} - 1,$$

et de celles qui concernent les points B_3, C_3, D_3, il résulte que

$$\frac{1}{\mathrm{LA}_3} + \frac{1}{\mathrm{LB}_3} + \frac{1}{\mathrm{LC}_3} + \frac{1}{\mathrm{LD}_3} = \frac{1}{\mathrm{OL}} \cdot \frac{\cot \mathrm{A} + \cot \mathrm{B} + \cot \mathrm{C} + \cot \mathrm{D}}{\mathrm{tg}\theta} - 4$$

$$= \frac{1}{\mathrm{OL}} (\cot \mathrm{U} \cot \theta - 4).$$

Cette relation est analogue à celle que nous avons donnée pour le diamètre de BROCARD du triangle (1).

3. — Si on remplace les cercles inscrits (I_i) aux triangles égaux t_i par des cercles concentriques de même rayon arbitraire λ, ceux-ci sont situés sur une sphère de centre ω et de rayon tel que

$$\sigma'^2 = \overline{\omega I_i^2} + \lambda^2 = m^2 R^2 + \lambda^2.$$

Ainsi, lorsque le tétraèdre T est *isodynamique*, les triangles égaux t_i sont équilatéraux et leurs cercles circonscrits, de rayons $r'_i = 2r_i$, sont sur une sphère, concentrique à la sphère (ω, σ), qui fait partie d'un système de TÜCKER que nous avons déjà signalé (2). Dans ce tétraèdre spécial, les relations (7) à (10) donnent, d'abord,

$$r'_i = 2r_i = 2(1 - m) \mathrm{R} \operatorname{tg} \theta,$$

et ensuite l'expression

$$\sigma'^2 = \mathrm{R}^2 \, . \, [4(1 - m)^2 \operatorname{tg}^2 \theta + m^2]$$

du carré du rayon de la sphère de TÜCKER (ω, σ') de ce système.

4. — Nous nous bornons à la considération des cercles *inscrits* aux triangles égaux t_i et à celle du point de LEMOINE L, laissant l'examen des autres cercles tritangents et des sept points *associés* de L à l'agrément du lecteur.

(1) *Mathesis*, t. LVI-151 et 345, question 3325.
(2) *Mathesis*, 1932, Supplément.

Deuxième Section

—

Sciences physiques et chimiques

La Section constitue son Bureau pour l'exercice 1948-1949 :

Président : M. J. M. Delfosse.

Vice-Président : M. G. Guében.

Secrétaire : M. C. Manneback.

La récession des nébuleuses extra-galactiques

(3e partie) (1)

PAR

P. DRUMAUX

Professeur à l'Université de Gand

Dans les deux premières parties de cette étude nous avons recherché les trajectoires des nébuleuses. Nous allons maintenant nous occuper de leur détermination par des observations astronomiques.

Nous rappellerons d'abord les diverses conclusions auxquelles nous avons abouti précédemment :

1°) La loi tensorielle générale de la gravitation permet d'obtenir la loi régissant la vitesse des nébuleuses sans faire appel à aucune hypothèse mais en tenant compte de ce que la voie lactée est en chute libre et en procédant par approximation et d'un point de vue macroscopique.

On trouve que la vitesse $\bar{v}$ des nébuleuses est une fonction vectorielle linéaire du rayon-vecteur r mené de la voie lactée vers la nébuleuse envisagée. Dans des axes coordonnés trirectangulaires à leur origine O, supposée solidaire de la voie lactée, les composantes de la vitesse sont :

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ v_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ v_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \tag{1}$$

(1) Pour la première et la deuxième partie de cette étude voir *Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles*, T. LXI (1947), Série I, 3e fascicule, décembre 1947, p. 228 et T. LXII (1948), Série I, 1er fascicule, mars 1948, p. 27.

où x_1, x_2 et x_3 sont les coordonnées spatiales de la nébuleuse et où les 9 coefficients $a_{\mu\nu}$ dépendent de la métrique de l'espace-temps osculateur ayant avec l'espace-temps réel un contact du 3ᵉ ordre sur la voie lactée et à l'époque cosmique actuelle prise comme origine pour le temps t.

2°) Deux cas peuvent se présenter dans l'intégration des équations (1) selon que la cubique :

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22}-k & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

a une seule racine réelle ou bien trois.

Dans le premier cas les trajectoires sont des spirales gauches elliptiques en forme de vrille, et dans le second cas les trajectoires sont des courbes exponentielles apériodiques.

Leurs équations peuvent se mettre sous la forme suivante très simple englobant les deux cas ; mais la simplicité n'est qu'apparente, parce qu'elle fait intervenir les racines k_1, k_2 et k_3 de la cubique susdite dont les expressions sont compliquées, et qu'elle fait appel à des coordonnées normales par rapport à un trièdre de référence dont l'orientation des faces dépend également de ces racines :

$$x'_1 = (x'_1)_0\, e^{k_1 t} \qquad x'_2 = (x'_2)_0\, e^{k_2 t} \qquad x'_3 = (x'_3)_0\, e^{k_3 t} \qquad (11)$$

où les x'_μ sont les coordonnées normales en question de la nébuleuse envisagée et $(x'_\mu)_0$ leur valeur à l'époque cosmique actuelle prise pour origine du temps t.

Dans le cas d'une seule racine réelle les équations (11) donnent des spirales gauches elliptiques et dans le cas de trois racines réelles elles donnent un mouvement apériodique.

3°) Dans les deux cas la vitesse $\bar{v}$ peut se décomposer en une composante irrotationnelle $\bar{u}$ et une composante solénoïdale $\bar{w}$ correspondant respectivement à un mouvement relatif et à un mouvement d'entraînement. Le mouvement relatif dû à la vitesse $\bar{u}$ peut à son tour se décomposer en un mouvement radial et en un mouvement angulaire de nutation, tandis que le mouvement d'entraînement dû à la vitesse $\bar{w}$ est un immense mouvement de rotation représentant une précession à vitesse angulaire constante $\bar{\omega}$ de tout l'ensemble des nébuleuses extra-galactiques autour d'un axe d'orientation immuable que nous avons désigné sous le nom d'axe cosmique.

La vitesse angulaire ω de cette précession est très faible, étant de l'ordre du millième de seconde d'arc par siècle, mais elle donne néanmoins lieu à des vitesses linéaires transversales élevées pour les nébuleuses situées à grande distance de l'axe cosmique. Les composantes de $\bar{\omega}$ sont :

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(a_{23} - a_{32}) \qquad \omega_2 = \frac{1}{2}(a_{31} - a_{13}) \qquad \omega_3 = \frac{1}{2}(a_{12} - a_{21}) \qquad (24)$$

4°) Si pour les nébuleuses situées sur une sphère de rayon r ayant la voie lactée pour centre on mène à partir de l'origine O des axes coordonnés un vecteur égal et parallèle à la vitesse v de chacune de ces nébuleuses on obtient un ellipsoïde. La même opération pour la composante u donnera un second

ellipsoïde. Si alors on change de coordonnées en prenant pour nouveaux axes coordonnés les axes de l'ellipsoïde irrotationnel $\bar{u}$, on aura, en désignant les diverses grandeurs précédentes par des majuscules pour les nouveaux axes :

$$U_1 = A_{11}X_1 \qquad U_2 = A_{22}X_2 \qquad U_3 = A_{33}X_3 \tag{25}$$

$$W_1 = \Omega_3X_2 - \Omega_2X_3 \qquad W_2 = \Omega_1X_3 - \Omega_3X_1 \qquad W_3 = \Omega_2X_1 - \Omega_1X_2 \tag{26}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= A_{11}X_1 + \Omega_3X_2 - \Omega_2X_3 \\ V_2 &= -\Omega_3X_1 + A_{22}X_2 + \Omega_1X_3 \\ V_3 &= \Omega_2X_1 - \Omega_1X_2 + A_{33}X_3 \end{aligned} \tag{27}$$

La cubique (5) devient alors :

$$\begin{vmatrix} A_{11} - K & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & A_{22} - K & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & A_{33} - K \end{vmatrix} = 0 \tag{28}$$

Les 9 coefficients $a_{\mu\nu}$ qui dans les anciens axes coordonnés déterminaient les mouvements des nébuleuses sont remplacés dans les nouveaux axes par les 6 coefficients A_{11}, A_{22}, A_{33}, Ω_1, Ω_2 et Ω_3 de (27) dont la signification est particulièrement simple : A_{11}, A_{22} et A_{33} sont les longueurs des axes de l'ellipsoïde irrotationnel $\bar{u}$, tandis que le vecteur $\bar{\Omega}$ est la vitesse angulaire de précession.

Il y a toujours précession parce que les indices μ et ν des coefficients $a_{\mu\nu}$ intervenant dans (24) ne sont pas permutables. Le cas du mouvement apériodique correspondant à l'existence de trois racines réelles de (5) ou de (28) n'est pas incompatible avec une précession à vitesse angulaire constante parce que le mouvement angulaire dû à la composante irrotationnelle $\bar{u}$ est variable et peut être rétrograde de façon à compenser asymptotiquement la précession à la limite pour un temps très long.

Rappelons ici que du fait que notre étude procède par approximation les trajectoires ne sont valables que pour une partie de leur parcours endéans certaines limites de distance et de durée et que la totalité des trajectoires n'est envisagée que pour fixer les idées sur les tronçons utilisables.

D'autre part l'examen de la cubique (28) montre que les trajectoires sont ou bien spiraloïdes ellpitiques ou bien exponentielles apériodiques selon que la précession $\bar{\Omega}$ est grande ou petite.

5°) En ce qui concerne la vitesse radiale v_r le diagramme du vecteur $\sqrt{\dfrac{r}{v_r}}$ est un ellipsoïde, tandis que celui de $\sqrt{\dfrac{v_r}{r}}$ est un ovaloïde.

Si les coefficients A_{11}, A_{22} et A_{33} sont tous trois positifs, la vitesse radiale est de récession dans toutes les directions.

6°) Si on considère les trajectoires non plus dans des axes coordonnés solidaires de la voie lactée mais dans des axes liés aux énormes masses lointaines situées au-delà de la portée du télescope et qui sont prédominantes pour la création du champ gravifique dans lequel la voie lactée et les nébuleuses extragalactiques se meuvent à des vitesses comparables à celle de la lumière, la forme des trajectoires sera très différente. Au lieu d'être très divergentes elles forme-

ront une famille de courbes presque parallèles avec une faible courbure et une minime torsion.

7°) A l'époque cosmique actuelle la voie lactée descend la pente du potentiel gravifique.

* * *

Ayant ainsi rappelé les conclusions obtenues précédemment, examinons maintenant si les observations astronomiques pourraient déterminer les divers mouvements que nous avons été amenés à attribuer aux nébuleuses extra-galactiques.

C'est une question de précision à atteindre dans la mesure de leur effet Doppler.

On sait que cet effet est donné par la loi suivante :

Soit λ la longueur d'onde d'une radiation émise par une source lumineuse en repos par rapport à l'observateur et soit λ' la longueur d'onde de la même radiation lorsque la source est animée d'une vitesse v faisant un angle φ avec la direction dans laquelle se trouve l'observateur, cet angle étant mesuré dans le système d'axes lié à l'observateur. L'effet Doppler sera :

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1 + \frac{v \cos \varphi}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{32}$$

En développant $\dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ en série et en négligeant les termes à partir du 3e ordre, on obtient :

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{v \cos \varphi}{c} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \tag{33}$$

où $\dfrac{1}{2} \dfrac{v^2}{c^2}$ représente l'effet transversal.

Comme d'après les équations (1) v croît proportionnellement à la distance r, on voit que cet effet transversal croîtra comme le carré de la distance.

Considérons dès lors deux nébuleuses situées à peu près dans la même direction, la première à une distance r de la voie lactée et la seconde à une distance m fois plus grande désignée par r_m. Soit $D = \dfrac{\lambda' - \lambda}{\lambda}$ l'effet Doppler de la première et soit $D_m = \dfrac{\lambda'_m - \lambda}{\lambda}$ celui de la seconde, λ'_m étant la longueur d'onde correspondante.

On aura pour la première nébuleuse :

$$D = \frac{v \cos \varphi}{c} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \tag{34}$$

et pour la seconde :

$$D_m = m \frac{v \cos \varphi}{c} + \frac{1}{2} m^2 \frac{v^2}{c^2} \tag{35}$$

De là on tire :

$$\frac{v \cos \varphi}{c} = \frac{m^2 D - D_m}{m(m-1)} \tag{36}$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2(D_m - mD)}{m(m-1)}} \tag{37}$$

Cette mesure de $\frac{v}{c}$ présente de grandes difficultés car elle demande une haute précision dans la détermination des effets Doppler D et D_m et du rapport m des distances. Les difficultés proviennent de ce que l'effet Doppler transversal est du second ordre, étant représenté par $\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$, et qu'il peut être considéré comme dû à la relativité du temps. La mesure de $\frac{v}{c}$ au moyen de la relation (37) est donc équivalente à une mesure directe du ralentissement du temps causé par la vitesse et on sait que les mesures de ce genre exigent une grande précision, ce qui est d'ailleurs évident a priori en raison de la petitesse de $\frac{v^2}{c^2}$.

D'ailleurs, si l'on calcule, en partant de (37), l'erreur à laquelle il faut s'attendre sur $\frac{v}{c}$ on trouve qu'elle est considérable à moins que la mesure de D, D_m et des distances r et r_m ne puisse se faire avec beaucoup de précision.

En effet si l'on différentie (37) en assimilant, suivant la méthode usuelle, les différentielles aux erreurs, désignées ci-après par le symbole Δ, on trouve aisément pour le cas le plus défavorable au point de vue du signe des erreurs :

$$\frac{\Delta\left(\frac{v}{c}\right)}{\frac{v}{c}} = \frac{1}{2}\left[\frac{D_m}{D_m - mD}\frac{\Delta D_m}{D_m} + \frac{mD}{D_m - mD}\frac{\Delta D}{D} + \left(\frac{mD}{D_m - mD} + \frac{2m-1}{m-1}\right)\left(\frac{\Delta r_m}{r_m} + \frac{\Delta r}{r}\right)\right] \tag{38}$$

En adoptant une vitesse radiale de 15000 km sec pour r égal à cent millions d'années lumière et en supposant un rapport m des distances égal à 4, on trouve :

$$\frac{\Delta\left(\frac{v}{c}\right)}{\frac{v}{c}} = 8\,\frac{\Delta \mathrm{D}_m}{\mathrm{D}_m} + 7\,\frac{\Delta \mathrm{D}}{\mathrm{D}} + 8\left(\frac{\Delta r_m}{r_m} + \frac{\Delta r}{r}\right) \tag{39}$$

montrant la nécessité d'une haute précision dans la mesure des effets Doppler et des distances.

Un calcul analogue effectué à partir de (36) donne pour l'erreur sur la vitesse radiale :

$$\frac{\Delta\left(\frac{v\cos\varphi}{c}\right)}{\frac{v\cos\varphi}{c}} = \frac{m^2\mathrm{D}}{m^2\mathrm{D} - \mathrm{D}_m}\,\frac{\Delta\mathrm{D}}{\mathrm{D}} + \frac{\mathrm{D}_m}{m^2\mathrm{D} - \mathrm{D}_m}\,\frac{\Delta\mathrm{D}_m}{\mathrm{D}_m}$$

$$+ \left(\frac{2\mathrm{D}_m}{m^2\mathrm{D} - \mathrm{D}_m} - \frac{1}{m - 1}\right)\left(\frac{\Delta r_m}{r_m} + \frac{\Delta r}{r}\right) \tag{40}$$

Pour les mêmes distances que ci-dessus on aura :

$$\frac{\Delta\left(\frac{v\cos\varphi}{c}\right)}{\frac{v\cos\varphi}{c}} = 1{,}4\,\frac{\Delta\mathrm{D}}{\mathrm{D}} + 0{,}4\,\frac{\Delta\mathrm{D}_m}{\mathrm{D}_m} + 0{,}4\left(\frac{\Delta r_m}{r_m} + \frac{\Delta r}{r}\right) \tag{41}$$

montrant que les conditions de précision sont alors beaucoup moins défavorables, comme il fallait d'ailleurs s'y attendre.

Si l'on se rapporte à (38) on voit que l'erreur sur $\frac{v}{c}$ est principalement influencée par la petitesse de $\mathrm{D}_m - m\mathrm{D}$. D'après (34) et (35) on a :

$$\mathrm{D}_m - m\mathrm{D} = \frac{1}{2}\, m\,(m - 1)\,\frac{v^2}{c^2} \tag{42}$$

Cette expression augmente avec m, ce qui améliore les conditions de précision, mais on est fort limité pour m ; de sorte que l'erreur finale sur $\frac{v}{c}$ reste considérable.

Comme $\mathrm{D}_m - m\mathrm{D}$ dépend de $\frac{v^2}{c^2}$ le problème n'est pas sans avoir quelque analogie avec celui du décalage gravifique des raies du spectre

solaire, où l'on mesure également un ralentissement du temps avec les difficultés que pareille détermination comporte, étant évidemment entendu que pour les raies des nébuleuses c'est la puissance du télescope qui est le facteur dominant.

En somme le problème revient au suivant : tandis que la vitesse des nébuleuses est proportionnelle à la distance, leur effet Doppler ne l'est pas, et il s'agit de déterminer l'écart qu'il présente par rapport à la proportionnalité, c'est-à-dire $D_m - mD$, dont la mesure ne devient possible que pour une valeur suffisante de m, laquelle dépend de la portée du télecsope. Il va de soi, en effet, que des deux nébuleuses envisagées la plus rapprochée devra encore présenter un décalage suffisant des raies pour que l'erreur sur D ne soit pas excessive, tandis que la plus éloignée devra encore donner des raies assez intenses que pour limiter l'erreur sur D_m.

On voit donc qu'une mesure suffisamment précise de l'effet Doppler de deux nébuleuses situées dans la même direction permettrait de déterminer par les équations (36) et (37) la composante radiale $v \cos \varphi$ de la vitesse et la valeur absolue v de celle-ci.

Passons maintenant à la détermination de 9 constantes $a_{\mu\nu}$ des équations (1) dont dépendent tous les mouvements des nébuleuses.

Considérons d'abord la vitesse radiale $v_r = v \cos \varphi$. En projetant les trois composantes, v_1, v_2 et v_3 de la vitesse v sur le rayon vecteur r on a, en désignant par θ_1, θ_2 et θ_3 les angles directeurs de r :

$$v_r = v \cos \varphi = v_1 \cos \theta_1 + v_2 \cos \theta_2 + v_3 \cos \theta_3 \tag{43}$$

ou bien, compte tenu de (1) :

$$\begin{aligned}\frac{v_r}{r} = a_{11} \cos^2 \theta_1 + a_{22} \cos^2 \theta_2 + a_{33} \cos^2 \theta_3 + (a_{23} + a_{32}) \cos \theta_2 \cos \theta_3 \\ + (a_{31} + a_{13}) \cos \theta_3 \cos \theta_1 + (a_{12} + a_{21}) \cos \theta_1 \cos \theta_2\end{aligned} \tag{44}$$

Dans cette équation $\frac{v_r}{r}$ est censé avoir été déterminé par les effets Doppler de deux nébuleuses situées dans la direction θ_1, θ_2, θ_3.

Cinq autres équations analogues pourront de même être obtenues par l'observation de cinq autres paires de nébuleuses ce qui donnera un système de six équations linéaires permettant de déterminer a_{11}, a_{22}, a_{33}, $a_{23} + a_{32}$, $a_{31} + a_{13}$ et $a_{12} + a_{21}$.

Posons : $$a_{23} + a_{32} \equiv s_1 \qquad a_{31} + a_{13} \equiv s_2 \qquad a_{12} + a_{21} \equiv s_3 \tag{45}$$

qui seront donc des quantités connues.

Considérons ensuite la valeur absolue v de la vitesse. En vertu des équations (1) on a :

$$\left(\frac{v}{r}\right)^2 = (a_{11}\cos\theta_1+a_{12}\cos\theta_2+a_{13}\cos\theta_3)^2+(a_{21}\cos\theta_1+a_{22}\cos\theta_2 + a_{23}\cos\theta_3)^2+(a_{31}\cos\theta_1+a_{32}\cos\theta_2+a_{33}\cos\theta_3)^2 \quad (46)$$

$$=(a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2)\cos^2\theta_1+(a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2)\cos^2\theta_2+(a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2)\cos^2\theta_3$$
$$+2(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32})\cos\theta_1\cos\theta_2$$
$$+2(a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33})\cos\theta_2\cos\theta_3$$
$$+2(a_{13}a_{11}+a_{23}a_{21}+a_{33}a_{31})\cos\theta_3\cos\theta_1 \quad (47)$$

Les six paires de nébuleuses donneront un système de six équations similaires qui permettront de déterminer les six expressions figurant entre parenthèses dans les seconds membres. Posons pour les trois premières expressions :

$$a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2=S_1^2 \qquad a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2=S_2^2 \qquad a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2=S_3^2 \quad (48)$$

qui seront des grandeurs connues.

On aura, compte tenu de (45) :

$$\begin{aligned} a_{11}^2+(s_3-a_{12})^2+a_{31}^2&=S_1^2\\ a_{12}^2+a_{22}^2+(s_1-a_{23})^2&=S_2^2\\ (s_2-a_{31})^2+a_{23}^2+a_{33}^2&=S_3^2 \end{aligned} \quad (49)$$

ou bien, en posant :

$$S_1^2-a_{11}^2=R_1^2 \qquad S_2^2-a_{22}^2=R_2^2 \qquad S_3^2-a_{33}^2=R_3^2$$

$$\begin{aligned} (a_{12}-s_3)^2+a_{31}^2&=R_1^2\\ (a_{23}-s_1)^2+a_{12}^2&=R_2^2\\ (a_{31}-s_2)^2+a_{23}^2&=R_3^2 \end{aligned} \quad (50)$$

dont la résolution donnera les valeurs des trois inconnues a_{12}, a_{23} et a_{31}, vu que s_1, s_2, s_3, R_1, R_2 et R_3 seront connus.

Dans une représentation graphique où l'on assimilerait a_{12}, a_{23} et a_{31} à des coordonnées trirectangulaires, la solution serait figurée par un point commun aux trois cylindres circulaires représentées par les équations (50).

Les effets Doppler de six paires de nébuleuses conduiraient donc à la connaissance des 9 coefficients $a_{\mu\nu}$, lesquels déterminent complètement les mouvements des nébuleuses. En effet la cubique (5) donnera par ses trois racines les trajectoires. D'autre part les composantes ω_1, ω_2 et ω_3 de la vitesse angulaire de précession $\bar{\omega}$ seront

données respectivement par $\frac{1}{2}(a_{23} - a_{32})$, $\frac{1}{2}(a_{31} - a_{13})$ et $\frac{1}{2}(a_{12} - a_{21})$.
Enfin les coefficients $a_{\mu\nu}$ donneront l'ellipsoïde $\bar{v}$ des vitesses, l'ellipsoïde $\bar{u}$ du mouvement irrotationnel et l'ovaloïde des vitesses radiales ainsi que l'ellipsoïde inverse correspondant.

L'étude étant macroscopique les observations devront nécessairement porter sur un nombre suffisant de nébuleuses.

En raison de la précision requise dans les effets Doppler l'obtention de ces résultats est évidemment subordonnée à la puissance du télescope.

En résumé le mouvement des nébuleuses résulte uniquement de la loi de gravitation. Comme on a affaire au problème d'un grand nombre de corps, dans un champ gravifique très étendu, il n'est pas surprenant, si l'on se place à l'échelle voulue pour ce champ et surtout pour les masses qui l'engendrent, qu'en première approximation le mouvement résultant se ramène à la coexistence de mouvements simultanés simples, à savoir un mouvement général d'entraînement à très grande vitesse et un mouvement d'ensemble de rotation extrêmement lent, auxquels se superposent les mouvements irrotationnels radiaux et angulaires.

Ces résultats ne sont valables que pour la région du monde cosmique qui nous avoisine et si, même pour cette région, on va au-delà d'une première approximation, en partant d'un espace-temps osculateur du 4e ordre, les mouvements se révèlent plus complexes.

On voit que l'Univers n'est pas du tout comme on se l'était figuré et que le mouvement de gravitation y intervient au plus haut degré car plus l'échelle à laquelle on envisage les étendues cosmiques est grande, plus les masses en jeu sont fatalement considérables et par conséquent aussi les différences de potentiel, qui deviennent capables d'engendrer des vitesses comparables à celle de la lumière, mais dont on n'observe que les différences.

SUR LE CONDENSATEUR A DEUX MIROIRS SPHÉRIQUES

Note de M. A. Biot

1. *Généralités.* — Parmi les condensateurs employés en ultramicroscopie, le plus perfectionné est celui qui comporte deux miroirs sphériques (fig. 1). Un rayon lumineux, émané d'une source relativement éloignée, tombe d'abord sur un miroir convexe puis sur un miroir concave en forme de couronne où il se réfléchit une seconde fois et coupe l'axe optique du système en un point P dans le voisinage duquel doivent passer, avec un minimum d'aberrations, les autres rayons lumineux appelés à traverser l'instrument. Pour choisir ces

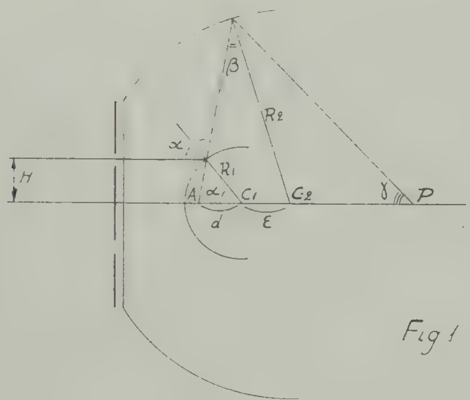

Fig 1

rayons on dispose, en avant du système et centré sur son axe optique, un diaphragme annulaire, de sorte que tous les rayons émanés du point à l'infini sur l'axe sont définitivement compris entre deux cônes dont les sommets se trouvent dans le voisinage de P.

Appelons C_1 et C_2 les centres des deux sphères, ε la distance C_1C_2 comptée positivement dans le sens de la lumière; les rayons de ces sphères seront, successivement, R_1 et R_2; α, β, γ représenteront dans l'ordre les angles d'incidence successifs d'un rayon lumineux primi-

tivement parallèle à l'axe optique et l'angle que forme finalement ce rayon avec l'axe optique en P ; nous désignerons enfin par H la hauteur d'incidence du rayon considéré sur la première sphère.

Nous nous proposons d'étudier ici différents points relatifs à ces systèmes optiques.

2. *Expression de la distance focale paraxiale du système.* — La distance focale du premier miroir vaut $\frac{R_1}{2}$. Celle de la combinaison s'obtiendra en multipliant $\frac{R_1}{2}$ par le grandissement g que réalise le second miroir quand il donne de F_1, foyer du premier miroir, une image F, foyer du système total. On trouve facilement

$$g = \frac{R_2}{R_2 - R_1 - 2\varepsilon}$$

$$f = g\frac{R_1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1 - 2\varepsilon}$$

3. *Le condensateur cardioïde.* — Le condensateur dit cardioïde est composé, en principe, d'un miroir sphérique convexe et d'un miroir concave de révolution dont la méridienne est une cardioïde convenable. Il réalise en un foyer une correction parfaite de l'aberration sphérique pour tous les rayons lumineux émanés du point à l'infini sur l'axe optique du système. C'est ce que nous allons montrer.

Considérons un cercle de centre O et de rayon R et faisons rouler sur ce cercle, sans glissement, un autre cercle de même rayon. La courbe décrite par un point du cercle mobile est, par définition, une cardioïde. (Nous en avons représenté, dans la figure 2, la moitié supérieure). Après rotation d'un certain angle, le cercle mobile supposé avoir d'abord son centre sur la droite OR — au-delà de R vers la droite — vient à l'avoir en O'. Le point R du cercle mobile est venu en A et les angles BOR, BOA sont égaux puisque les arcs RB, BA le sont. Comme les rayons OR et O'A sont égaux, il en résulte que AR est parallèle à O'A.

Dans ces conditions, les angles OBR et BRA sont égaux. Il en résulte angle BRA = angle ARB et angle O'AB = angle BAR. On a d'ailleurs BR = AB, de sorte que les quatre derniers angles sont égaux entre eux.

Le point A est sur la cardioïde. Comme le cercle mobile tourne, dans son mouvement instantané, autour du point B, la droite BA est

la normale à la cardioïde au point A. Il résulte donc de l'égalité des angles en A que si RA est un rayon lumineux il se réfléchit sur la cardioïde suivant AO'.

Traçons maintenant le cercle de rayon $\frac{R}{2}$ tangent en B au cercle primitif. Le rayon réfléchi le coupe en C et, dans le demi cercle O'CB BC est perpendiculaire sur AC.

L'angle BO''C, extérieur au triangle O'O''C est égal à $O''CO' + CO'O'' = 2\,CO'O''$, puisque ces angles sont égaux. Il résulte de cette égalité que les arcs EB et BC sont égaux : on peut considérer le point O'' comme le centre d'un cercle de rayon $\frac{R}{2}$ qui aurait roulé sans glisser sur le cercle de rayon R, le point de ce cercle qui était d'abord en E étant venu, dans ce mouvement, en C. On sait que le lieu du point C est une épicycloïde à deux rebroussements (nous avons représenté un quart de cette courbe). D'ailleurs CB est la normale en C à cette courbe ; AC en est donc la tangente en ce point et l'épicycloïde en question est la caustique de la cardioïde pour le point R, point de rebroussement de cette dernière courbe.

On sait, et on démontre d'ailleurs facilement par un procédé semblable à celui que nous venons d'utiliser, que l'épicycloïde à laquelle nous sommes arrivés est aussi la caustique du cercle de rayon 2R pour des rayons incidents parallèles à la droite OR. Il en résulte que le système : cercle de rayon 2R, cardioïde de foyer R et de paramètre R, donne du point à l'infini sur OR une image sans aberration au point de rebroussement de la cardioïde.

4. *Utilisation pratique de ce résultat.* — Il est pratiquement impossible de réaliser, avec une précision suffisante, une surface réfléchissante dont la méridienne soit une cardioïde. Voyons par quelle surface nous pouvons la remplacer.

Recherchons la développée de la cardioïde définie au numéro précédent.

Cette cardioïde a comme équation paramétrique, ainsi qu'on le vérifie facilement

$$x = 2R\cos\delta - R\cos 2\delta$$
$$y = 2R\sin\delta - R\sin 2\delta,$$

l'origine étant en O et l'angle δ étant l'angle ROB.

D'une manière générale les équations paramétriques de la développée seront de la forme

$$\alpha = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}$$

$$\beta = y - \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}$$

En appliquant ces relations on trouve

$$\alpha = \frac{1}{3}\,(2R\cos\delta + R\cos 2\delta)$$

$$\beta = \frac{1}{3}\,(2R\sin\delta + R\sin 2\delta)$$

C'est une cardioïde semblable à la première, réduite par rapport à celle-ci suivant le facteur 1 /3 et placée comme il est indiqué sur la figure 2. On voit qu'aucun centre de courbure relatif à la cardioïde en un point intéressant de cette courbe ne se trouve sur l'axe OR. Si

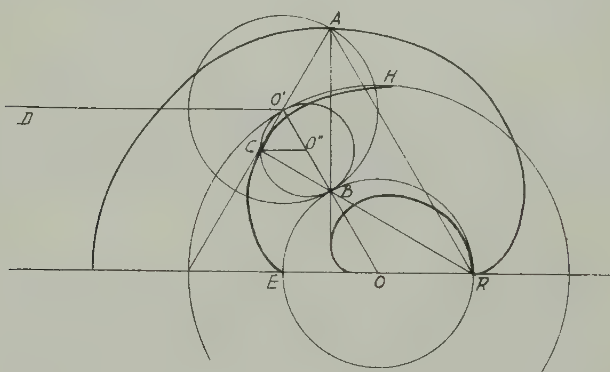

Fig. 2

l'on décidait de remplacer la cardioïde par son cercle osculateur en un de ses points, le miroir de révolution que l'on obtiendrait de la sorte serait un tore, également difficile à obtenir en pratique avec la haute précision requise dans l'instrument que nous étudions.

En fait, on utilise deux miroirs sphériques concentriques ou non. La théorie que nous venons de faire suggère que l'on doit avoir $\varepsilon < O$ dans le cas où l'on utilise deux miroirs non concentriques (voir fig. 2).

5. *Théorème.* — On peut démontrer d'une manière générale que dans un système optique composé de surfaces réfringentes ou réfléchissantes sphériques il est toujours possible, en principe, de faire en sorte que trois rayons lumineux quelconques, émanés par exemple, d'un même point de l'axe optique du système et situés dans un plan, se rencontrent à nouveau, après avoir traversé le système,en un même point de son axe. Nous allons montrer que la chose est possible quand on utilise un miroir sphérique.

Considérons donc dans un plan trois rayons lumineux ne passant pas par un même point, et une droite quelconque. Je dis qu'il est possible de trouver un miroir sphérique dont le centre se trouve sur la droite donnée et tel qu'après s'être réfléchis sur le miroir les rayons lumineux passent par un même point situé également sur la droite donnée.

Nous prendrons cette droite pour axe des x, l'origine se trouvant en un quelconque de ses points. Un rayon lumineux sera défini par son abscisse à l'origine x (a_1, a_2, a_3) et son coefficient angulaire ω (m_1, m_2, m_3). Une circonférence dont le centre se trouve sur OX est définie par les coordonnées α, O de ce centre et par son rayon de coubure R. Considérons le premier rayon incident. Le rayon réfléchi correspondant sera défini par son abscisse à l'origine d_1 et son coefficient angulaire γ_1.

Rayon incident n° 1, rayon réfléchi correspondant et circonférence ont un point commun x_1, y_1. On a

$$(x_1 - \alpha)^2 + y_1^2 = R^2$$

Par ailleurs, les coefficients angulaires des deux rayons lumineux, celui du rayon de la circonférence qui passe par x_1, y_1 peuvent s'écrire

$$m_1 = \frac{y_1}{x_1 - a_1}$$

$$\nu_1 = \frac{y_1}{x_1 - d_1}$$

$$\mu_1 = \frac{y_1}{x_1 - \alpha}$$

Ecrivons l'égalité des tangentes des angles d'incidence et de réflexion

$$\frac{\alpha - a_1}{y_1^2 + (x_1 - a_1)(x_1 - \alpha)} = \frac{d_1 - \alpha}{y_1^2 + (x_1 - d_1)(x_1 - \alpha)}$$

Ajoutons et soustrayons $(x_1 - \alpha)^2$ à chacun des dénominateurs. et remplaçons chaque fois $y_1^2 + (x_1 - \alpha)^2$ par R^2

$$\frac{\alpha - a_1}{R^2 + (x_1 - \alpha)(\alpha - a_1)} = \frac{d_1 - \alpha}{R^2 + (x_1 - \alpha)(\alpha - d_1)}$$

Inversons et mettons R^2 en évidence

$$(x_1 - \alpha) = \frac{1}{2} R^2 \frac{2\alpha - (a_1 + d_1)}{(\alpha - a_1)(\alpha - d_1)} \tag{1}$$

D'où

$$x_1 - a_1 = x_1 - \alpha - a_1 + a_1 = \frac{R^2}{2} \frac{2\alpha - (a_1 + d_1)}{(\alpha - a_1)(\alpha - d_1)} + \alpha - a_1$$

et

$$y_1 = m_1 (x_1 - a_1) = m_1 \left[\frac{R^2}{2} \frac{2\alpha - (a_1 + d_1)}{(\alpha - a_1)(\alpha - d_1)} + \alpha - a_1\right] \tag{2}$$

Elevons au carré les relations (1) et (2) et ajoutons membre à membre

$$(x_1 - a_1)^2 + y_1^2 = R^2 = \frac{1}{4(\alpha - a_1)^2(\alpha - d_1)^2} \Big\{ R^4[2\alpha - (a_1 + d_1)]^2 +$$

$$+ m_1^2 [R^2 \{ 2\alpha - (a_1 + d_1) \} + 2(\alpha - a_1)^2(\alpha - d_1)]^2 \Big\} \tag{3}$$

Cette équation (3) renferme seulement, comme quantités inconnues R, α et d_1. Nous pouvons en écrire deux autres analogues en R, α, d_2 et en R, α, d_3. Si nous ajoutons à ces équations les conditions $d_1 = d_2 = d_3$ $(= d)$ nous voyons qu'il est possible de trouver une surface sphérique réfléchissante (R, α) satisfaisant à la condition imposée, sauf si $a_1 = a_2 = a_3$.

En d'autres termes il est donc toujours possible en principe, dans un système optique centré complexe dont la dernière surface active est un miroir, de choisir les caractéristiques de ce dernier de manière que trois rayons lumineux isogènes quelconques et situés dans un même plan méridien du même côté de l'axe optique du système, coupent cette dernière droite en un même point après la traversée du système.

Ou encore plus simplement : dans un condensateur à deux miroirs sphériques, à diaphragme annulaire, il est en principe possible de corriger l'aberration sphérique pour trois rayons lumineux.

6. *Le condensateur à deux miroirs sphériques. Premières équations fondamentales.* — a. Soit (fig. 1) $AC_1 = d_1$. On a

$$d_1 = \frac{R_1}{2\cos\alpha}$$

$$(d_1 + \varepsilon)\sin 2\alpha = R_2 \sin\beta$$

$$2\alpha = 2\beta + \gamma$$

D'où

$$R_1 \sin\alpha + \varepsilon \sin 2\alpha = R_2 \sin\beta \qquad (1)$$

Notons que l'on a aussi

$$d_2 = \frac{R_2 \sin\beta}{\sin\gamma}$$

b. On peut exprimer d_2 autrement. Remplaçons $R_2 \sin\beta$ par sa valeur

$$d_2 = \frac{R_1 \sin\alpha + \varepsilon \sin 2\alpha}{\sin\gamma} = \frac{R_1 \sin\alpha}{\sin\gamma}\left(1 + \frac{2\varepsilon}{R_1}\cos\alpha\right) = \frac{H}{\sin\gamma}\left(1 + \frac{2\varepsilon}{R_1}\cos\alpha\right)$$

Cette relation est intéressante. Elle montre que si dans un condensateur l'aberration sphérique est nulle ($d_2 = C^{te}$) et si en même temps $\varepsilon = 0$, le rapport $\frac{H}{\sin\gamma} = C^{te}$, c'est-à-dire que la condition des sinus est satisfaite.

Elle ne peut l'être, par contre si $\varepsilon \neq 0$.

c. Reprenons l'équation (1) ci-dessus. On peut écrire successivement

$$R_1 \sin\alpha - R_2 \sin\beta + 2\varepsilon \sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$R_1 \sin\alpha - R_2 \sin\left(\alpha - \frac{\gamma}{2}\right) + 2\varepsilon \sin\alpha\cos\alpha = 0$$

Puis en développant et divisant par $\cos\alpha$

$$\operatorname{tg}\alpha\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\cos\frac{\gamma}{2}\right) + \frac{R_2}{R_1}\sin\frac{\gamma}{2} + 2\frac{\varepsilon}{R_2}\sin\alpha = 0$$

d. Si $\varepsilon = 0$ cette relation devient

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{R_2}{R_1}\sin\frac{\gamma}{2}}{\frac{R_2}{R_1}\cos\frac{\gamma}{2} - 1}$$

7. *Condition pour la suppression de l'aberration sphérique.* — a. On trouvera cette condition en exprimant que d_2 est stationnaire

$$\frac{\delta d_2}{\delta \alpha} = 0$$

En partant des relations établies au numéro précédent on trouve facilement la condition cherchée

$$\mathrm{tg}\,\gamma - 2\,\mathrm{tg}\alpha + 2\,\mathrm{tg}\,\beta + 2\,\frac{\varepsilon}{R_1}\,\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha}\,(\mathrm{tg}\,\gamma + 2\,\mathrm{tg}\,\beta) = 0$$

que l'on peut encore écrire

$$\left(2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma + \mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}\right)\left(1 + \frac{2\varepsilon}{R_1}\,\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha}\right) -$$

$$\frac{4\varepsilon}{R_1}\,\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\frac{1 + \mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}} = 0$$

b. Si $\varepsilon = 0$, cette relation devient

$$2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma + \mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2} = 0$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{4}\left(1 \pm \sqrt{5 - 4\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\gamma}{2}}\right)$$

La correction sphérique est donc possible tant que

$$5 - 4\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\gamma}{2} \geqslant 0$$

ou

$$\frac{\gamma}{2} \leqslant 48^\circ 12' \,,\quad \gamma \leqslant 96^\circ 24'.$$

8. *Sur le calcul du condensateur.* — On se donne les deux valeurs limites de γ, soient γ_1 et γ_2. L'aberration sphérique doit être corrigée pour au moins une valeur de γ comprise entre γ_1 et γ_2.

a. $\varepsilon = 0$ (surfaces concentriques). On se donne γ de correction. Les deux relations

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \gamma \left(1 \pm \sqrt{5 - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}\right)$$

et

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{R_2}{R_1} \sin \frac{\gamma}{2}}{\frac{R_2}{R_1} \cos \frac{\gamma}{2} - 1}$$

combinées, donnent

$$\frac{R_2}{R_1} = \cos \frac{\gamma}{2} \; \frac{1 \pm \sqrt{5 - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \mp \sqrt{5 - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}}$$

A chaque valeur de γ correspond une valeur (de correction) du rapport $\frac{R_2}{R_1}$. Le condensateur est défini quand on se donne γ. Il est impossible que d_2 soit minimum pour deux valeurs voisines de γ dans un condensateur donné ; on ne peut avoir ici une correction triple. La correction obtenue est du genre parabolique. (Elle est représentée par une parabole dans un plan d_2, γ). Elle s'étudie pour toute combinaison concrète par des calculs trigonométriques basés sur les formules du n° 6. L'angle utilisable atteint quelques degrés de part et d'autre de l'axe de la parabole.

b. $\varepsilon \neq 0$. Surfaces non concentriques. — Les équations du problème sont les suivantes

$$\sin \alpha + \frac{\varepsilon}{R_1} \sin 2\alpha - \frac{R_2}{R} \sin \beta = 0$$

$$2\alpha = 2\beta + \gamma$$

$$\operatorname{tg} \gamma - 2 \operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} \beta + 2 \frac{\varepsilon}{R_1} \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} (\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} \beta) = 0$$

On se donne toujours γ moyen. Il s'agit de calculer $\frac{\varepsilon}{R_1}$ et $\frac{R_2}{R_1}$.

L'équation obtenue en éliminant α et β entre les trois relations précédentes est indéterminée. On peut imposer une condition supplémentaire. Celle par exemple de la double stationnarité de d_2 dans l'intervalle γ_1, γ_2. En pratique on opérera généralement par tâtonnements

trigonométriques. Dans le cas de la correction triple la courbe qui représente dans le plan d_2, γ les valeurs de d_2 est une courbe en S : d_2 présente, en fonction de γ, un maximum, en minimum et un point d'inflexion entre les valeurs extrêmes d_1 et d_2 correspondant à γ_1 et γ_2.

Dans le cas de la correction triple, l'aberration sphérique résiduelle correspondant à un intervalle donné γ_1, γ_2 est beaucoup moindre que celle qui correspond, pour le même intervalle, à la correction par des miroirs concentriques. La précision de l'exécution doit être, dans ce cas, considérable si l'on désire réaliser pratiquement la correction théorique.

9. *Profondeur de foyer.* — Nous supposerons l'aberration sphérique corrigée : les surfaces d'ondes, dans l'espace image, sont des sphères centrées sur le point c de correction.

Considérons une de ces sphères et, sur cette sphère, dans un plan méridien, ses points d'intersection avec les rayons d'inclinaisons respectives γ_1 et γ_2. Soient A et B ces points. En C, le retard relatif des ondulations lumineuses qui passent par A et B est nul. Il vaut $\frac{\lambda}{4}$ pour un point D de l'axe optique distant de C d'une quantité ε que nous allons calculer. Il vaut en effet

$$AD - BD = \varepsilon \ (\cos \gamma_{ext.} - \cos \gamma_{int.}) = \frac{\lambda}{4}$$

Soit, pour fixer les idées, $\gamma_{ext} = 54^o$, $\gamma_{int} = 46^o$. On a

$$\frac{\lambda}{4} = \varepsilon \ (0{,}69 - 0{,}59)$$

ou

$$\xi = 1{,}4 \ \mu \qquad (\lambda = 0{,}55 \ \mu)$$

La profondeur de foyer totale — pour un retard relatif $\frac{\lambda}{4}$ est 2ε, soit, dans le cas considéré $2{,}8 \ \mu$. Cette définition que nous avons donnée ici de la profondeur de foyer est plus ou moins arbitraire. Notre calcul montre toutefois qu'elle est en fait très réduite. Ce résultat est important au point de vue exécution et manipulation.

Azéotropes d'halogénures et d'oxydes

PAR

MAURICE LECAT

Ce travail clôt la série afférente aux azéotropes (et aux systèmes zéotropiques) binaires orthobares, constitués d'un oxyde et d'un corps d'autre fonction chimique [1].

Par souci de concision, nous ne répétons pas ici les instructions concernant l'objet des diverses colonnes des tableaux, ni les abréviations et les références bibliographiques [2].

Constatons seulement qu'*ici* le signe de l'orthobare d'ébullition (zéo-, ou azéotropique) est aussi souvent négatif que positif.

CHLORURE DE MÉTHYLE (— 23°7)

Anhydride carbonique (— 79,1 ; 55,4). Les isothermes de tension de vapeur sont linéaires, suivant [Hartman [361,2 ('99), 368 ('01)], Kuenen [489 ('92), 490 et 493 ('93), 494 ('97), 492 ('98), 499 ('01)], Zawidzki [1277 ('00), 1281 ('02)], Brinkman [112 ('04)]. Mais, suivant Caubet [151 ('00), 155,7 ('01), 159 ('02)], la tension de vapeur aurait 1 maximé et 1 minimé ; ce résultat est invraisemblable.

Oxyde de méthyle (— 23,65 ; 0,05 ?). Il y a très nettement azéotropie positive — à déterminer. [1]

CHLORURE D'ÉTHYLE (12,4)

ZÉOTROPIE. — Anhydride carb. (— 79,1 ; 91,5). Titre de la vapeur : Thiel et Schulte [1064*a*, p. 331/3] ('20). — Furanne (31,7 ; 19,3), ∽ idéale.

β-CHLORPROPÈNE (22,65)

Z. — Furanne (31,7 ; 9,05), l. n. — Ox. É (34,6 ; 11,95), ∽ id. [50 : — 1,5 ∽].

CHLORURE D'ISOPROPYLE (34,9)

Z. — Méthylal (42,3 ; 7,3), m. [95 : 0,3] [*568*g*, n° 317] ('36).

---

(1) Voir ces *Annales* : 61 (1947), p. 153/62, 255/62 ; 62 (1948), p. 55/60.

(2) On réfère, par des numéros entre crochets, à la « Bibliographie de l'Azéotropie » (2 tomes : 1932 et 1942). — *Az.* '18, désigne l'ouvrage « Azéotropisme », Bruxelles, 1918. — *A. Ch.* réfère aux *Annales de Chimie*, série 12, 2 (1947), mars-avril, p. 158-202 ; ici, pour un système zéotropique, l'endroit est indiqué par la lettre *b* marquant le n° de l'azéotrope sous lequel se trouve le système envisagé. — Un astérisque * signifie que les données numériques consignées à l'endroit indiqué ne constituent qu'une première approximation.

Bromure d'éthyle (38,4)

Z. — Ox. É (34,6; 3,8), n. [67 : — 1,0; 23 : — 0,4] (Az., '18, nº 1496). Zéotropie observée par Ryland [914/7] ('99). — Ox. propène (34,1; 4,3), l. n. — Méthylal (42,3; 3,9), l. p. [71 : 1,8] (Az., '18, nº 1498).

Dichlorméthane (chlorure de méthylène) (40,0)

Ox. de propène	34,1	5,9	40,6	—0,6	77	—	—	[2]
Oxyde d'éthyle	34,6	5,4	40,8	—0,8	70	50 : –5,5	*A.Ch.* nº	[3]
Méthoxypropane	38,9	1,1	44,8	—4,8	57	50 : –5,5	— [146	[4]
Méthylal	42,3	2,3	45,0	—2,7	41	60 : –2,7	(1)	[5]

(1) *C. R. Acad. Sciences*, t. 222 (1946), p. 733.

Z. — Furanne (31,7; 8,3), f. n. (*A. Ch.*, b. 188).

Iodure de méthyle (42,5)

Méthylal	42,3	0,2	39,45	2,85	57?	47 : 2,0	(1)	[6]

(1) Az. '18, nº 1501; *Ann. Ch.*, nº 331.

Z. — Ox. É (34,6; 7,9), l. n. [74 : 1,1]. Litvinov [635*c*] ('39) mesure la tension de vapeur à 35º et en compare les résultats à ceux de l'équ. de Duhem-Margules. — Méthoxypropane (38,9; 3,6), l. n. [10 : 0,2] (*A. Ch.*, b 332).

Chlorure d'allyle (45,15)

Méthylal	42,3	2,85	41,4	0,9	20	*568*g*, nº 61	[7]

Z. — Oxyde d'éthyle (34,6; 10,55), à peu près idéale.

Chlorure de propyle (46,65)

Z. — Méthylal (42,3; 4,35), q.-az. [12 : 0,6]. *A*. 61 (1947), p. 148, nº 89. — Ox. É (34,6; 11,05), ∽ idéale [50 : — 2,0]. *A* (l. c.), nº 85. — Méthoxypropane (38,9; 7,75), l. n. [50 : — 1,8].

Chlorure de butyle 3re (50,8)

Zéotropie. — Méthylal (42,3; 8,5), m. [10 : 9,5].

1-1-Dichloréthane (chlorure d'éthylidène) (57,25)

Z. — Méthylal (42,3; 14,95), m. n. [10 : 0,2?]. — Éthoxypropane (63,85; 6,35), f. n. [95 : — 0,7] (*568*g*, nº 375).

Bromure d'isopropyle (59,4)

Z. — Diméthylacétal (64,3; 4,9), f. — Éthoxypropane (63,85; 4,2), l. n. [95 : — 0,3] (*568*g*, nº 354; *A. Ch.*, b 94); ox. i. P. (68,3; 8,9), l. n. [90 : — 1,2] (*A. Ch.*, b 94).

Chloroforme (61,2)

Méthylal	42,3	18,9	61,8	–0,6	92,5	52 : –8,1	(1)	[8]
Éthoxypropane	63,85	2,65	>69,0	>–5,15	>35	95 : –3,2	—	[9]
Diméthylacétal	64,3	3,1	67,2	–2,9	32	—	—	[10]
Formal M-É	65,9	4,7	>67,5	>–1,6	20	—	—	[11]

(1) *Ann. Ch.*, nº 651. — Litvinov [635*c*] ('40) a déterminé expérimentalement les tensions de vapeur à 35º et les a comparées avec les résultats de l'équ. de Duhem-Margules.

Z. — Oxyde de propène (34,1; 27,1), m. n. [95 : — 3,5].

Oxyde d'éthyle (34,6; 26,6), m. (?) n. :

Mixtion : 1) élévation de temp. pour le titre mol. (de 66,7 %) est 14°4; 2) contraction : 1,3 %, selon Bussy [132, p. 10/6] ('65). Selon Guthrie [350, p. 505/6] ('84), à volumes égaux, contraction de 1,09 %. Mais l'indication de Dolezalek [210, p. 194] ('10), pour l'élévation de temp., 11°7, est grossière. Cf. Timofeëv [1081] ('05) pour la chaleur de mixtion.

Pour la tension de vapeur, l'isotherme de 19°2 est négative : Guthrie [350, p. 510] ('84). Cf. Guglielmo [343/4] ('92).

Le système n'est pas azéotropique, sous 760 mm, suivant Ryland [914/7] ('99). Ce que confirment : Haywood [374] ('99) et Tyrer [1093] ('11), qui, chacun, déterminent l'orthobare d'ébullition (*).

Méthoxypropane (38,9; 22,3), zéotropie f. n. [95 : — 3,8].

CHLORURE DE BUTYLE 2re (68,25)

Z. — Éthoxypropane (63,85; 4,4), l. n. [10 : — 0,7].

CHLORURE D'ISOBUTYLE (68,85)

Ox. d'isopropyle	68,3	0,55	>69,0	>–0,15	?	50 : –2,5	—	[12]

Z. — Diméthylacétal (64,3; 4,55), q.-az. — Éthoxypropane (63,85; 5,0), l. n. [10 : — 0,5] (*568g, n° 355) ['36].

CHLORACÉTOL (ACÉTONE DICHLORÉE) (70,4)

Ox. d'isopropyle	68,3	2,1	74,0	–3,6	60	50 : –2,0	∽	[13]

BROMURE D'ALLYLE (70,5). — ZÉOTROPIES. — Formal méthyléthylique (65,9; 4,6), q.-az. — Diméthylacétal (64,3; 6,2), m.

BROMURE DE PROPYLE (71,0). — Z. — Formal M. É (65,9; 5,1), f. (?) p. — Diméthylacétal (64,3; 6,7), m. — Éthoxypropane (63,85; 7,15), l. n. [95 : — 0,4].

IODURE D'ÉTHYLE (72,3). — Z. — Diméthylacétal (64,3; 8,0), m. — Ox. isopropyle (68,3; 4,0), l. n. [70 : — 0,5].

BROM. DE BUTYLE 3re (73,25). — Z. — Formal M. É (65,9; 7,35), m. — Ox. isopropyle (68,3; 4,95), l. n. [50 : — 0,7].

(*) Suivant KOHNSTAMM [453 ('01)], ainsi que K. et DALFSEN [459/60] ('02), l'isotherme de tension de vap. de 33°25 a une inflexion peu marquée et, à cette temp., il y a az. — Selon DOLEZALEK [210, p. 194] ('10), il y aurait combinaison équimoléculaire partielle à l'état liquide et — cf. TSAKALATOS [1090] ('10) — à l'état de vap., un mélange mol. renfermerait 24 % de combinaison; celle-ci est complète à — 80°, temp. où le chloroforme-éther cristallise. Sur les courbes de combinaison, de contraction et d'élévation de temp. par mixtion, le maximant est le même. D. et SCHULZE [213/4] ('12/3) trouvent que les isothermes de tension de vap. sont toutes convexes; mais, la temp. s'élevant, elles se rapprochent de la droite. Les isothermes, totales et partielles, déterminées chacune par 10 points [214, p. 54/9] ('13), grâce à la « loi de Dolezalek », concordent avec celles de KOHNSTAMM et DALFSEN [*l. c.*], à 33°25, 60°, 80° et 100°.—Courbe du titre de la combinaison à 20°, à 33°25, à 60 %, à 80 et à 100°, avec maximant à 50 % mol. [214, p. 47/60] ('13). — Sont aussi déterminées : la courbe de la chaleur spécif., de densité [214, p. 64/7], de la contraction (p. 67/9), du pouvoir réfringent (p. 69/73) et de viscosité (p. 73/6). Pour celle-ci, cf. DRUCKER, [227] ('17). — Pour les isothermes de tens. de vap. part., cf. FREDENHAGEN et TRAMITZ [297c, p. 355/7] ('40).

TÉTRACHLORURE DE CARBONE (76,75)

Z. — Ox. É (34,6; 42,15), n. [70 : — 2,75]. — Orthobare d'éb. (10 points). La courbe de chal. de vapor. (10 p.) a forte courbure : Tyrer [1093 ('11), p. 1641/2; 1094 ('12), p. 86/7]. — Dioxane (101,35; 24,6), idéale [90 : — 0,6].

CHLORURE DE BUTYLE (78,5). — Z. — Éthylal (87,95; 9,45), m. (*A. Ch.*, b 279). — Di M. acétal (64,3; 14,2), l. — Ox. i. P (68,3; 10,2), l. n. [90 : — 1,3]; Ox. P (90,1; 11,6), l. n. [50 : — 3].

1,2-DICHLORÉTHANE (CHLORURE D'ÉTHYLÈNE) (83,45)

Éthylal	87,95	4,45	88,95	–1,0	22	20 : –2,5	*A.Ch.*,277	[14]

Z. — Ox. P (90,1; 6,6), q.-az. n. [50 : — 2,0]. — Ox. i. P (68,3; 15,2), m. n.; dioxane (101,35; 17,9), m. n. (*A. Ch.*, b 222, p. 172). — Ox. É (34,6; 48,9), l. n. [63 : — 2,35]. — Ox. éthylène (10,75; 72,75), z. orthobare; tens. de vap. à 0°, 10°, 20° : Kaplan et *al.* [434*a*, 434*c*] ('37).

TRICHLORÉTHYLÈNE (86,9)

Éthylal	87,95	1,05	89,25	–1,3	53	52 : –3,9	(1)	[15]

(1) *C. R. Acad. Sciences*, 217 (1943), p. 242/4, n° 20.

Z. — Dioxane (101,35; 14,45), m. n. [92 : — 1,5] (*A. Ch.*, b 224). — Ox. i. P (68,3; 18,6), l. n.; acétal (103,55; 16,65), l. n. [90 : — 2,8].

IODURE D'ISOPROPYLE (89,45)

Éthylal	87,95	1,5	86,15	1,8	37	*A. Ch.* n° 278	[16]

Z. — Dioxane (101,35; 11,9), m. p.

DICHLORBROMOMÉTHANE (90,1)

Éthylal	87,95	2,15	94,05	–3,95	74	53 : –6,9	(1)	[17]
Ox. de propyle	90,1	0,0	97,0	–6,9	54	60 : –11,8	(2)	[18]

(1) *C. R. Acad. Sc.* 217 (1943), p. 242/4, n° 21. — (2) *568*g*, n° 69.

Z. — Acétal (103,55; 13,45), q.-az. n. (*569, n° 111). — Diméthylacétal (64,3; 25,8), m. n.

BROM. D'ISOBUTYLE (91,4). — Z. — Dioxane (101,35; 9,95), m. [90 : 0,1] (*A. Ch.*, b 224). — Acétal (103,55; 12,15), l.

DIBROMOMÉTHANE (97,0). — Ox. P (90,1; 6,9), q.-az. n. [95 : — 0,4]. — Éthylal (87,95; 9,05), f. n. [95 : — 0,2] (*A. Ch.*, b 279); acétal (103,55; 6,55), f. n.

CHLORURE D'ISOAMYLE (99,4)

Dioxane	101,35	1,95	97,5	1,9	64	*A. Ch.*, n° 216	[19]

Z. — Acétal (103,55; 4,15), q.-az. — Éthylal (87,95; 11,45), m. (*A. Ch.*, b 279). — Ox. P (90,1; 9,3), l. n. [10 : — 0,5].

BROMURE DE BUTYLE (101,5)

Dioxane	101,35	0,15	98,0	3,35	53	*A. Ch.*, n° 217	[20]

Z. — Ox. propyle (90,1; 11,4), l. n. [5 : — 0,2].

IODURE D'ALLYLE (101,8)

Dioxane	101,35	0,45	98,5	2,85	56	*A. Ch.*, n° 218		[21]
Acétal	103,55	1,75	100,0	1,8	67	ᔕ	—	[22]

IODURE PROPYLE (102,4)

Dioxane	101,35	1,05	98,75	2,6	60	50 : −0,9	—	[23]
Acétal	103,55	1,15	101,0	1,4	60	*568g, nº 155		[24]

CHLORBROMURE ÉTHYLÈNE s. (106,7)

Acétal	103,55	3,25	108,5	−1,8	65	∽	—	[25]

1,1-DIBROMÉTHANE (BROMURE D'ÉTHYLIDÈNE) (109,5 ∽). — Z. — Acétal (103,55; 5,95), q.-az. n. — Ox. i. B (122,3; 12,8), m. n.

BROMURE D'ISOAMYLE (120,65). — Z. — Dioxane (101,35; 19,3), t. l. [10 : — 0,3] (*A. Ch.*, b 224).

PERCHLORÉTHYLÈNE (121,1)

Paraldéhyde	124,35	3,35	118,95	2,05	68	50 : 1,5	(1)	[26]

(1) La densité de l'az. est 1,375 (grande dilatation). *Az.*, '18, nº 863.

Z. — Dioxane (101,35; 19,75), q.-az. [20 : 1,1] (*A. Ch.*, b 224).

BROM. D'ÉTHYLÈNE (131,65). — Z. — Ox. B (142,4; 10,75), f. n. [95 : — 0,3].

CHLORBENZÈNE (131,75). — Z. — Paraldéhyde (124,35; 7,6), ∽ idéale [60 : — 2,1] (*Az.*, '18, nº 865). — Ox. i. B (122,3; 9,45), l. n. [95 : — 0,3]; ox. B (142,4; 10,75), l. n. [95 : — 0,5] (568g, nº 330).

BROMURE DE PROPÈNE (140,5)

Ox. de butyle	142,4	1,9	146,0	−3,6	40	—	—	[27]

Z. — Anisole (153,85; 13,35), ∽ idéale [90 : 0,3].

TÉTRACHLORÉTHANE s. (146,2)

Ox. de butyle	142,4	3,8	148,0	−1,8	70	95 : − 2,0	(1)	[28]
Orthoform. d'É.	145,75	0,55	151,5	−5,3	61	60 : −10,1	(2)	[29]

(1) *568g, nº 159. — (2) *C. R. Acad. Sciences*, 217 (1943), p. 242/4, nº 15.

Z. — Anisole (153,85; 7,65), m. n. [90 : — 2,2] (*569, nº 90).

IODURE D'ISOAMYLE (147,65). — Z. — Ox. B (142,4; 5,25), m. n. — Anisole (153,85; 6,2), l. p. [90 : 0,2] (*570, nº 197).

BROMOFORME (149,5). — Z. — Anisole (153,85; 4,35), f. n. [50 : — 2,1] (*Az.*, '18, nº 1507). — Ox. i. B (122,3; 27,2), m. n. [95 : — 2,5]. — Orthoform. É (145,75; 3,75), m. n. — Ox. M et By. (167,8; 18,3), l. n. [90 : — 1,2].

BROMOBENZÈNE (156,1). — Z. — Orthoform. É (145,75; 10,35), idéale. — Ox. B (142,4; 13,7), l. n. [80 : — 1,0]; ox. M et By (167,8; 11,7), l. n. [50 : 0,3]. — Anisole (153,85; 2,25), m. n. [50 : 0,0] (*Az.*, '18, nº 1508); point de Bancroft inexistant.

BROMURE D'HEXYLE n. (156,5). — Z. — Ox. B (142,4; 14,1), ∽ idéale [10 — 0,1]. — Ox. M et By (167,8; 11,3), t. l. n.

TRICHLORHYDRINE (TRICHLORPROPANE-1, 2, 3) (156,85). — Z. — Anisole (153,85; 3,0), q.-az. [19 : 0,6] (*550, nº 91). — Ox. M et By (167,8; 10,95), l. p. [90 : 0,4]; phénétole (170,45; 13,6), l. p. [90 : 0,3] (568g, nº 274). — Ox. B (142,4; 14,45), l. n.

ORTHOCHLORTOLUÈNE (159,2). — Z. — Ox. M et By (167,8; 8,6), ∽ idéale [90 : — 0,1]; phénétole (170,45; 11,25), ∽ idéale [50 : 0,2]. — Anisole (153,85; 5,35), l. n. [95 : — 0,2]. — Ces 2 derniers syst. n'ont pas de point de Bancroft.

Pentachloréthane (162,0). — Z. — Orthoform. É (145,75; 16,25), m. p. Anisole (153,85; 8,15), l. n. [50 : — 2,5] (*549, nº 113); point de B. : 15,3 mm., 50º; ox. M et By (167,8; 5,8), l. n. [50 : — 2,7]; phénétole (170,45; 8,45), l. n. [95 : — 0,2] (550, nº 94); ox. i. A (173,2; 11,2), l. n. [50 : 2,9 ∽] (*568*g*, 255). — Cinéole (176,35; 14,35), m. n. [26 : — 5,7] (*548, nº 23). Les 3 derniers syst. n'ont pas de point de B. — Ox. M et p. crésyle (177,05; 15,05), m. n.

Parachlortoluène (162,4). — Z. — Phénétole (170,45; 8,05), ∽ idéale [95 : 0,3]; cinéole (176,35; 13,95), ∽ id. — Anisole (153,85; 8,55), l. n. [90 : — 0,5] (**Az.*, '18, nº 1510). Ces 3 syst. n'ont pas de point de Bancroft.

Bromure de triméthylène (166,9)

Oxyde de M et By	167,8	0,9	>170	–2,2	>45	—	—	[30]

Z. — Phénétole (170,45; 3,55), n. [10 : 0,3]. — Ox. de M et p. crésyle (177,05; 10,15), l. n.

Paradichlorbenzène (174,4)

Ox. d'isoamyle	173,2	1,2	172,1	1,1	36,5	*560, nº 143*c*		[31]
Cinéole (1)	176,35	1,95	174,1	0,3	80∽	*548, nº 21		[32]

(1) Le point de Bancroft de ce système est à 120º.

Z. — Ox. A. n. (187,5; 13,1), l. p. — Ox. M et By (167,8; 6,6), ∽ id.; ox. É et By (185,0; 10,6), ∽ id. — Phénétole (170,45; 3,95), t. l. n. (560, nº 314*b*); point de B. : 111 mm. et 110º. — Ox. de M et p. crésyle (177,05; 2,65), q.-az. n. (561, nº 185).

Chlorure de benzyle (179,3)

Cinéole	176,35	2,95	175,55	0,8	19∽	30 : –0,7	*Az.*, 1515	[33]

Z. — Phénétole (170,45; 8,85), ∽ idéale [5 : 0,5] (550, nº 73).

Orthodichlorbenzène (179,5)

Ox. M et p. crésyl.	177,05	2,45	179,6	–0,1	5∽	—	—	[34]

Z. — Cinéole (176,35; 3,15), f. — Ox. i. A (173,2; 6,3), m.; ox. A (187,5; 8,0), m. — Phénétole (170,45; 9,05), ∽ idéale [5 : 0,1]; ox. É et By (185,0; 5,5), ∽ id.

Diiodométhane (iodure de méthylène) (*181)

Ox. d'isoamyle	173,2	>7,2	166,5	6,7	55	∽	(1)	[35]
Cinéole (2)	176,35	>4,65	169,6	6,75	60	∽	(3)	[36]

(1) *Acad. R. Belg., Bull. Cl. Sc.*, (5) 42 (1946), nº 42. — (2) Réact. chim. — (3) Idem, nº 43.

Orthobromotoluène (181,5). — Z. — Ox. i. A (173,2; 8,3), p. (568*g*, nº 441). — Cinéole (176,35; 5,15), m. p. [23 : — 0,7] (*548, nº 22); pas de point de Bancroft. — Phénétole (170,45; 11,05), ∽ idéale (570, nº 199) [5 : 0,3]; point de B. : 6 mm. et 50º.

Métabromotoluène (184,3). — Z. — Cinéole (176,35; 7,95), l. [10 : 0,4] (*A. Ch.*, b. 393, p. 181). — Ox. de P. et phényle (190,5 ∽ ; 6,2 ∽), l. n.

Parabromotoluène (185,0). — Z. — Cinéole (176,35; 8,65), l. (*570, nº 202).

Iodobenzène (188,45). — Z. — Phénétole (170,45; 18,0), t. l. n. — Ox. de M et p. crésyle (177,05; 11,4), l.n. — Ox. d'É et By (185,0; 3,45), m. n. [50 : 0,5].

Parachlorbromobenzène (196,4). — Z. — Ox. É et By (185,0; 11,4), l. n.

Bromure de benzyle (198,5). — Z. — Ox. É. et bornyle (204,9; 6,3), l. n.

TRICHLORBENZÈNE s. (208,4)

Méthylal isoamyl.	210,8	2,4	213,0	-2,2	35	∽	—	[37]

PARADIBROMOBENZÈNE (220,25)

Z. — Éther di M. du Résorcinol (214,7; 5,55), m. n. (*554, n° 224); ox. de M et d'α-terpényle (216,2; 4,05), m. n. (*568g, n° 422); ox. de M et de thymyle (216,5; 3,75), m. n. — Éther di É. du Résorcinol (235,0; 14,75), t. l. n.

α-CHLORNAPHTALÈNE (262,7)

Ox. de phényle	259,0	3,4	258,92	0,08	6∽	*561, n° 136	[38]

Z. — Ox. de M et d'eugényle (254,7; 8,0), l. p. [5 : — 0,1 ∽] (*561, n° 245). — Isosafrole (252,0; 10,7), ∽ idéale [5 : 0,0 ∽] (*561, n° 244), point de Bancroft : 36 mm. et 150° (?); ox. de M et isoeugényle (270,5; 7,8), ∽ id.

α-BROMONAPHTALÈNE (281,2)

Z. — Ox. de phényle et de benzyle (286,5; 5,3), f. — Ox. de M et d'isoeugényle (270,5; 10,5), ∽ idéale.

10 avril 1948.

Uccle-Bruxelles,
Laboratoire privé de l'auteur.

(1992) Etablissements Ceuterick, s. c., rue Vital Decoster 66, Louvain.

Revue des Questions Scientifiques

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891) ; **la deuxième,** 20 volumes (1892-1901) ; la **troisième**, 30 volumes (1902-1921) ; la **quatrième**, 30 vol. (1922-1936). La livraison de janvier 1937 inaugura la **cinquième série**.

La revue fut interrompue par la guerre, après le deuxième fascicule, avril 1940, du tome 117 de la collection. Ce tome fut achevé par les fascicules de février et juillet 1946.

Chaque année paraît un tome, en quatre fascicules d'environ 160 pages chacun, 20 janvier, 20 avril, 20 juillet, 20 octobre.

Depuis 1947 la Revue est aussi l'organe de l'UNION CATHOLIQUE DES SCIENTIFIQUES FRANÇAIS.

Administration et Rédaction : **11, rue des Récollets, Louvain** (Belgique.)

PRIX D'ABONNEMENT :

Belgique, Congo belge et Grand-Duché de Luxembourg	**200 francs belges**
France et colonies françaises (s'adresser au Centre du Livre français, 1, rue de la Visitation, Paris 7e) . .	**500 francs franç.**
Suisse (s'adresser à la Librairie de l'Université, 6, rue Haldimand, Lausanne).	**28 francs suisses**
Canada (s'adresser aux Messageries France-Canada, 5466, avenue du Parc, Montréal 8)	**6 dollars 50**
Autres pays (s'adresser au Secrétariat, à Louvain) . . .	**280 francs belges**

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

EXTRAIT DU CATALOGUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. **100,00**

TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES,
t. I à XXV (1875 à 1901) . . . . fr. **20,00**
t. XXVI à XLVI (1902 à 1926) . . . . fr. **40,00**

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,
Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à t. LVI (1927 à 1936) fr. **70,00**
Série B (sc. physiques et naturelles) » fr. **70,00**
Série C (sc. médicales) (1927 et 1928) fr. **100,00** — (1929 à 1933) fr. **40,00**
(1934 à 1936) fr. **20,00**
Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) fr. **20,00** — (1930) fr. **60,00**
(1931 à 1936) fr. **100,00**
Série I (sc. mathématiques et physiques), tt. LVII à LXI (1937 à 1947) fr. **70,00**
Série II (sc. naturelles et médicales), tt. LVII à LX (1937 à 1940,46) fr. **70,00**
Série III (sc. économiques), tt. LVII à LIX (1937 à 1940,46) fr. **100,00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,
t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels . . . . fr. **120,00**
Le fascicule trimestriel . . . . fr. **34,00**
t. XCIII à CXVI (1928 à 1939). Les deux volumes annuels . . fr. **160,00**
Le fascicule . . . . fr. **28.00**
t. CXVII (1940 et 1946), t. CXVIII (1947). Le volume . . . fr. **200,00**
Le fascicule . . . . fr. **60,00**

TABLES ANALYTQUES DE LA REVUE,
t. I à L (1877 à 1901) . . . . fr. **20.00**
t. LI à LXXX (1902 à 1921) . . . . fr. **20,00**
t. LXXXI à CX (1922 à 1936) . . . . fr. **30,00**

MONOGRAPHIES DE SCIENCES NATURELLES

I. — **B. Tougarinoff.** Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930) : . . . fr. **24,00** autres pays, **30,00** fr.

II. — **V. Schaffers.** Le paratonnerre et ses progrès récents. Un vol. in-8° de 90 pages (1931) : en Belgique, fr. **24,00** ; autres pays, fr. **30,00**.

IV. — **F. Kaisin et E. de Pierpont.** Hydrogéologie des Calcaires de la Belgique. Un vol. in-8° de 111 pages, avec 35 fig. et un plan hors-texte (1939) : en Belgique, fr. **24,00** ; autres pays, fr. **30,00**. (épuisé)

MONOGRAPHIES MÉDICALES

I. — **M. Schillings.** Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec 8 planches hors-texte (1928) : en Belgique, fr. **70,00** ; autres pays, fr. **90,00**

III. — **P. Van Gehuchten.** La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8° de 52 pages, avec 8 planches hors-texte (1930) : en Belgique, fr. **24,00** ; autres pays, fr. **30,00**.

MONOGRAPHIES DES SCIENCES ÉCONOMIQUES

I. — **A. Henry.** La structure technique de l'agriculture belge et ses particularités en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages . . fr. **20,00**

II. — **A. Henry.** Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vol. de 50 pages . . . . fr. **10,00**

III. — **A. Delperée.** La réglementation conventionnelle des conditions de travail en Belgique. Un vol. de 200 pages . . . . fr. **60,00**